指数関数

定理 12.1. 正の数 a にたいして、

$$\mathbb{Q} \ni q \mapsto a^q \in \mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$ 上の連続関数に拡張されて $a > 1$ ならば単調増加、$a < 1$ ならば単調減少、$a = 1$ なら定数関数になる。$x \in \mathbb{R}$ におけるこの関数の値を a^x と書く。

Proof. $x \in \mathbb{R}$ にたいして、x に収束する有理数列 $\{q_j\}$ をとり、$\{a^{q_j}\}$ を考えると、これはコーシー列であることがわかる。ゆえに、この列はある実数に収束する。じつはこの実数は x の近似列 $\{q_j\}$ の取り方によらないことがわかるから、これを a^x と書いて差し支えない。$x \to a^x$ が連続であることは前回のレポート問題の解答と同様の方法により分かる。

□

定義 5.5 の e を思い出しておこう。

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定義 12.2. 指数関数 e^x の逆関数を $\log(x)$ で書き、x の自然対数とよぶ。

逆関数の定理により、$\log(x)$ は x の単調増加連続関数であることがわかる。
数学では断らない限り対数の底としては e をとり、自然対数を考えるのが普通である。

補題 12.3. $a^x = e^{x\log(a)}$.

定理 12.4 (“定理 1.19”)**.** 次のことがなりたつ。

(1) $\lim_{x\to\pm\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.
(2) $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$.
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. ($\log(x)$ の微分の基本になる式)
(4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. ($e^x$ の微分の基本になる式)

上の定理は e^x の $x \to 0$ の挙動を記述するものだが、$x \to \infty$ のときの挙動も大事である。

補題 12.5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

補題 12.6.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$$

を証明せよ。(この講義でいままでに得た知識、定理の中のどれを用いても構わない。)

問題 10.2 解答。

$a \in D = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$ において f が連続であることを示そう。任意の $\epsilon > 0$ にたいして、

$$\delta = \min(\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2\epsilon}{4})$$

とおく。

$|x-a| < \delta$ なる任意の x に対して、$|f(x) - f(a)| < \epsilon$ がなりたつことを示そう。そのために、$h = x - a$ とおく。一方で、$x = a + h$ であり、他方で $|x - a| < \delta$ から、

(*) $$|h| < \frac{|a|}{2}, \quad \text{かつ}$$

(**) $$|h| < \frac{|a|^2\epsilon}{4}$$

である。まずおとなしく $|f(x) - f(a)|$ を計算してみよう。

(A) $$|f(x) - f(a)| = |f(a+h) - f(a)| = |\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}| = |\frac{-h}{(a+h)a}| = \frac{|h|}{|a+h| \cdot |a|}$$

ここで、(*) と三角不等式により、

$$|a+h| \geq |a| - |h| > \frac{|a|}{2}$$

であって、なおかつ正の数の分数においては、分母が大きくなるほどその値は小さくなるから、

(B) $$\frac{|h|}{|a+h| \cdot |a|} \leq \frac{|h|}{\frac{|a|}{2} \cdot |a|} = \frac{|h|}{\frac{|a|^2}{2}}$$

がなりたつ。こんどは、(**) により、

(C) $$\frac{|h|}{\frac{|a|^2}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

である。(A),(B),(C) をつなぎあわせると、めでたく (任意の $\epsilon > 0$ に対して、δ を上のように定めれば $|x - a| < \delta$ なる任意の x に対して)

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

がなりたつことがわかった。

注意

上の解答で用いた三角不等式は、講義で述べたもの

(△) $$|x + y| \leq |x| + |y|$$

の応用である。$x = a + h, y = -h$ のときに (△) をもちいると

$$|a| \leq |a + h| + |-h| = |a + h| + |h|$$

を得る。あとは適当に移項すれば良い。不等式の向きに注意。うろ覚えで間違えた不等式を書かないように、とくに始めの間は**基本の三角不等式 (△) をしっかり覚えて**あとはそれを上のように応用することを考えた方が良い。