微分積分学概論 AI 要約 NO.11

逆関数

定義 11.1 (“1.3.6”)**.** 実数のある区間 I で定義された関数 f が狭義単調増加関数であるとは、

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

をみたすときにいう。

定理 11.2 (“教科書定理 1.16”)**.** f が閉区間 $[a,b]$ 上の狭義単調増加な連続関数であれば、

$$f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$$

の逆関数

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$$

が存在する。さらに、この f^{-1} は連続で、かつ狭義単調増加である。

例 11.3. 正の整数 n に対して、0 以上の実数を定義域とする関数 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は連続であり、狭義単調増加である。この関数は全射でもあるから、f は逆写像を持つ。この関数を

$$x \to \sqrt[n]{x}$$

と書く。つまり $y = \sqrt[n]{x}$ は $y^n = x$ を満たす唯一の正の実数である。

命題 11.4. 任意の正の実数 x に対して、

$$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$$

がなりたつ。

Proof. $y = \sqrt[n]{x}$ とおくと、定義により、 $y^n = x$.

$$(y^k)^n = y^{kn} = (y^n)^k = x^k.$$

ゆえに、y^k は n 乗して x^k になる実数である。そのような実数は唯一つ、すなわち $\sqrt[n]{x^k}$ しかないのであるから、両者は等しい。 □

同様にして、次のことが分かる。

命題 11.5. 正の整数 a, b, c, d が $a/b = c/d$ を満たせば、任意の実数 x にたいして、

$$\sqrt[b]{x^a} = \sqrt[d]{x^c}$$

がなりたつ。

この命題がなりたつので、$\sqrt[b]{x^a}$ のことを $x^{\frac{a}{b}}$ と書いても誤解の恐れがない。

例 11.6. この例では、高校で習う三角関数の知識は既知であるとする。

(1) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \mapsto \sin(x) \in [-1,1]$ は狭義単調増加連続関数である。その逆関数のことを $\arcsin(x)$ と書く。
(2) $[0,\pi] \ni x \mapsto \cos(x) \in [-1,1]$ は狭義単調減少連続関数である。その逆関数のことを $\arccos(x)$ と書く。
(3) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni x \mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加連続関数である。その逆関数のことを $\arctan(x)$ と書く。

$\arcsin, \arccos, \arctan$ はそれぞれ $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ などと書くこともある。

問題 11.1. 正の整数 n にたいし、$a_n = \sqrt[n]{2}$ とおく。このとき、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 に収束することを $\epsilon - N$ 法を用いて証明しなさい。

問題 11.2. 次のことを示しなさい。

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall q \in \mathbb{Q}(|q| < \delta \implies |2^q - 1| < \epsilon)$$

(レポート問題が二問以上ある時はどちらか一方を解けばよい。)

問題 9.1 解答。

$$(☆)\qquad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x (|x-0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \epsilon)$$

の否定、すなわち

$$(★)\qquad \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x; (|x-0| < \delta \text{ and } |f(x) - f(0)| \geq \epsilon)$$

を示せば良い。

$\epsilon = \frac{1}{2}$ と定める。どんな $\delta > 0$ をとってきても、$\frac{1}{\delta}$ より大きな整数 N が存在する (アルキメデスの原理)。

この N にたいし、

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2N\pi}$$

とおけば、

$$|x| = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2N\pi} < \frac{1}{N} < \delta$$

なのに、

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2N\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

で、とくに

$$|f(x) - f(0)| = 1 \geq \epsilon$$

である。

上の状況をゲームで表現することができる。(★) において、∃ 記号のついている変数を「味方側」の変数、∀ 記号のついているほうを「敵側」の変数と見ることにしよう。味方側の変数はこちらで決めれれば良い (決めるべきである) のにたいし、敵側の変数はこちらから決めることはできない。結論 $|f(x) - f(0)| \geq \epsilon$ が最終的に成立することを「味方の勝ち」と呼べば、上の証明は味方が必勝である (ような味方の戦略がある) ことを表している。

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (\text{if } x \neq 0) \\ 0 & (\text{if } x = 0) \end{cases}$$

敵側	味方側
	$\epsilon = \frac{1}{2}$
$\delta > 0$	
	$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2N\pi}$

結論 $|f(x) - f(0)| \geq \epsilon$.

こちらは ϵ として $\frac{1}{2}$ を選択した。対する敵側 δ は意外な一手。これを見たわたしは x を慎重に選び、勝利に結びつけたのであった。

(★) の攻守を入れ換えた (敵側から眺めた) ものが (☆) である。例えば $f(x) = x^2 - 5x$ の $x = 0$ における連続性をしめすのは、以下のようなゲーム戦略を考えているのと同じである。

$$f(x) = x^2 - 5x$$

敵側	味方側
$\epsilon > 0$	
	$\delta = \min(1, \epsilon/6)$
$x \in (-\delta, \delta)$	

結論 $|f(x) - f(0)| < \epsilon$.

敵側 ϵ は意外な一手。対するこちらはそれを見て冷静に δ を選択。これが必殺の一撃であった。以下は敵側 x をいろいろと試みて反撃するも、後の祭りであった。

上を見ても分かるように、(☆),(★) はそれぞれ次のように言い換えても良い。

$$(☆')\qquad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x \in (-\delta, \delta) \quad (|f(x) - f(0)| < \epsilon)$$

$$(★')\qquad \exists \epsilon > 0; \forall \delta > 0 \exists x \in (-\delta, \delta); \quad (|f(x) - f(0)| \geq \epsilon)$$