連続関数の性質

定義 10.1. $\mathbb{R}$ の部分集合 D 上で定義された f が D で連続であるとは、その定義域の全ての点 a で連続であること、すなわち、

$$\forall a \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x \in D \,(|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon)$$

が成り立つときに言う。

上の定義は、D が開区間や閉区間に限らず、一般的に適用できる形で述べられている。詳しくは多変数の場合に譲ろう。

定理 10.2 (“教科書定理 1.11”)**.** 同じ定義域を持つ連続関数 f, g について、

(1) $\lambda f + \mu g$ も連続関数である。
(2) fg も連続関数である。
(3) D の部分集合 $D_0 = \{x \in D; g(x) \neq 0\}$ において、f/g も連続関数である。

時間の都合で述べるのは省略するが、極限についても同様のことがらが成り立つ。教科書定理 1.10 を参照のこと。

系 10.3. (1) x の多項式で定義される関数 (多項式関数) は $\mathbb{R}$ で連続である。
(2) x の有理式で定義される関数

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad (p, q \text{ は } x \text{ の多項式})$$

(有理関数) は、$D_q = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$ で連続である。

上の定理は、下の定理の多変数版を用いるともっと鮮やかに証明される

定理 10.4. 二つの連続関数の合成関数は連続である。

定理 10.5 (“教科書定理 1.13”)**.** 関数 f が $x = a$ で連続とし、$f(a) > 0$ とする。このとき、$\exists \delta > 0$ で、

$$(a-\delta, a+\delta) \implies f(a) > 0$$

を満たすものが存在する。

次のことは、「連続 $\implies$ グラフがつながっている」ということの表現法の一つと言える。

定理 10.6 (“教科書定理 1.14”, 中間値の定理)**.** 関数 f が閉区間 $[a, b]$ で連続 (すなわち、$[a, b]$ の各点で連続) とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 γ にたいして、$f(c) = \gamma$ をみたすような $c \in [a, b]$ が存在する。

上の定理は、位相空間論において「連結集合の連続像は連結である」という定理に一般化される。(区間は実数直線の連結部分集合として特徴づけることができる。)

問題 10.1.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

とおくと、f は $x = 5$ において連続であることを定理 9.2 の (☆) にしたがって (つまり、今回の定理達を用いずに) 証明しなさい。

問題 10.2.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

とおくと、f は $D = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$ において連続であることを定義にしたがって証明しなさい。

問題 8.1 解答。

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8$$

である。これを示そう。

任意の $\epsilon > 0$ にたいして、$\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{100})$ とおく。すると、$|x-2| < \delta$ を満たすような 任意の x に対して、$|x^3 - 8| < \epsilon$ となることを以下に示そう。簡単のため、$t = x - 2$ で定まる新しい変数 t をもちいて、$x = 2 + t$ と変数変換することにする。$|x-2| < \delta$ により、

(1) $|t| < \delta$
(2) $|t| < 1$

が成り立つことに注意する。

$$
\begin{aligned}
&|x^3 - 8| \\
=&|(2+t)^3 - 8| \quad (t = x+2) \\
=&|12t + 6t^2 + t^3| \quad (\text{二項展開}) \\
\leq&12|t| + 6|t^2| + |t^3| \quad (\text{三角不等式}) \\
=&12|t| + 6|t|^2 + |t|^3 \\
\leq&12|t| + 6|t| + |t| \quad (\ |t| \leq 1 \text{ だから}) \\
=&19|t| \\
<&19\delta \quad\ |t| < \delta \text{ だから}) \\
=&\frac{19}{100}\epsilon \\
<&\epsilon
\end{aligned}
$$

がなりたつ。 □

解説: 今回は文字で表されるような数 (ϵ, δ, x, t など) の扱い方に注目しよう。

- 何の説明もなく使われる文字 (変数や定数) はない。
- 一旦決めた文字 (変数や定数) は値を変更することはできない。
  - たとえば、「任意の $\epsilon > 0$ に対して」という文言のあとは、ϵ の値はずっと決まったままである。(その文言のあと、「$\epsilon = 0.1$ とすると...」などとはできない。)
  - とくに、「任意の $\epsilon > 0$ に対して」が二つの場所で出てくる証明は何かがおかしいと考えるべきである。
- 新たにモノ (文字、変数、定数) を登場させるときには、それの決定法や、とりうる値の範囲などが、既に登場したモノのみで書き表せていることが重要である。

以上を元に、上の証明の、4 つの下波線部分を見てみる。

(1) 正の数 ϵ が与えられている。数学で「任意」という場合には『どんな値が来ても以下の議論は大丈夫である。』という意味である。したがって、ϵ の値を証明するヒトの都合によって変更したりすることはできない。
(2) δ の値を決めている。この値は証明のなかで既に決まっているデータ (今の場合は ϵ) が決まった途端に確実に決まる。
(3) x が登場した。これは 決められた範囲 $|x-2| < \delta$ を動き回る。それ以外には『どんな値が来ても以下の議論は大丈夫である』ように以下の議論を組み立てる必要がある。
(4) t は計算の便のための、いわば脇役である。その値は x の値から確実に決まる。