微分積分学概論 AI 要約 NO.7

コーシー列

コーシー列は数を構成したり、未知の数を探り出すときに大変有効である。それは「収束先の値に言及せずに収束を判定する」ことができるからである。

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数値 c に収束するとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_{>0} (n > N \implies |a_n - c| < \epsilon)$$

が成り立つときにいうのであった。カッコ内の $\implies$ は、... をみたすなら いつでも という意味であって、そこもキチンと表記すれば

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_{>0} \underline{\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}} (n > N \implies |a_n - c| < \epsilon)$$

となる。いずれにせよ、この定義をそのまま用いる限り、収束先 c を知らねば収束性を判定できない。「有界な単調列は収束する」という定理や、前回の諸定理はそれを補うものである。コーシー列もまたそのような役割を担う。

定義 7.1. 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_{>0} \forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < \epsilon$$

がなりたつときに言う。

補題 7.2. 実数の収束列はコーシー列である。

定理 7.3 (“定理 1.8”)**.** コーシー列は収束列である。

文章、とくに $\forall, \exists$ を含む文章について、その「否定」を言う必要が往々にして生じる。ジックリ考えれば分かる場合が多いが、それでは不十分で、反射神経的に分かるようになったほうがよい。慣れてしまえば簡単で、次の規則を機械的に適用すれば良い。

(1) 「$\forall x$ にたいして ... がなりたつ」の否定は「 $\exists x$ にたいして、... がなりたたない」 である。
(2) 「 $\exists x$ にたいして、 ... がなりたつ」の否定は「 $\forall x$ にたいして、.... がなりたたない」 である。
(3) 「A ならば B である」の否定は、「A なのに、B でない」である。

もっと短く記号で書くと、

$$\neg(\exists x P(x)) = \exists x(\neg P(x))$$
$$\neg(\forall x P(x)) = \forall x(\neg P(x))$$
$$\neg(A \implies B) = (A \text{ and } \neg B)$$

問題 7.1. $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ がコーシー列で、しかも 0 に収束しない とき、

(1) ある正の数 r とある正の整数 N_1 が存在して、

$$n > N_1 \implies |a_n| \geq r$$

が成り立つことを示しなさい。
(ヒント:

$$\exists r > 0 \exists N_1 \in \mathbb{Z}_{>0} \forall n \in \mathbb{Z} (n > N_1 \implies |a_n| \geq r)$$

の否定は

$$\forall r > 0 \forall N_1 \in \mathbb{Z}_{>0} \exists n \in \mathbb{Z} (n > N_1 \text{ and } |a_n| < r)$$

である。)

(2) コーシー列 $\{b_j\}$ で、$\{a_j b_j\}$ が 1 に収束するものがあることを証明しなさい。

オマケ:数の構成の概略

昔は、数は「単にそこにある」ものであって、その性質を調べようと言う態度であったが、それでは「パンがなければ、ケーキを食べれば良いのに」という発言と同じレベルになってしまう。現代では、数は「作らないと食べられない (使えない)」ものである。コーシーの誕生の年がフランス革命の起きた年と同じ 1789 年なのは象徴的である。

(Step 1). まず自然数を構成せねばならない。そして自然数について加法、乗法が存在して、加法の可換法則、結合法則等が成り立つことを数学的帰納法で示す。ポアンカレ著「科学と方法」(岩波文庫) をみればその概略を知ることができる。

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書こう。

(Step 2). 「負の数」とその計算規則を導入して、整数を構成する。例えば、次のようなことをする。

(1) 形式的に、 $a-b$ $(a,b \in \mathbb{N})$ の形で書ける数を整数と呼ぶ。
(2) $a-b$ と $c-d$ が同じ整数を表すのは、$a+d=b+c$ が成り立つときで、その時に限る。

そのあと、整数の和、差、積、および大小関係を定義し、それらが互いに「うまくいく」(無矛盾である) ことを示す。手間ではあるが、そんなに難しいことではない。

(このようなことは近年 (と言っても半世紀ぐらい前) Grothendieck 構成法として一般化された。)

整数の全体の集合を $\mathbb{Z}$ と書く。

(Step 3). 有理数を構成する。

(1) 形式的に、 a/b $(a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$ の形で書ける数を有理数と呼ぶ。
(2) a/b と c/d が同じ整数を表すのは、$ad=bc$ が成り立つときで、その時に限る。

有理数に対してもまたもや和、差、積および大小関係を定義できて、それらは高校までに習ったような諸関係を満たすことがわかる。

この部分は「環の商環」だとか「局所化」として一般化される。その一部分は代数学で習うことになる。

(Step 4). 実数を構成する。

(1) 有理数のコーシー列 $\{a_n\}$ の全体を $\mathfrak{R}$ とかこう。
(2) 二つの $\mathfrak{R}$ の元 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は、数列 $\{a_n-b_n\}$ が 0 に収束するとき「同じクラスに属する」と呼ぶ。
(3) $\mathfrak{R}$ を上のようなクラスわけで分けたときの各クラスを実数と呼び、実数の全体を、$\mathbb{R}$ と書く。

数列 $\{a_n\}$ がコーシー列かどうか、や 0 に収束するかどうか、は有理数の世界でも判定できることに注意しよう。

このステップは「任意の距離空間について、その完備化が存在する」という定理 (完備化定理) として一般化される。

以上のようにして構成した実数の全体 $\mathbb{R}$ が、解析学の場として充分強固であること、すなわち「上に有界な実数の集合は必ず上限を持つ」や「任意の実数のコーシー列はある実数に収束する」などの事実を示すことができ、それが現代的な解析学の出発点ということになる。