微分積分学概論 AI 要約 NO.6

区間縮小法と部分列

定理 6.1. (“定理 1.6” [区間縮小法]) 閉区間の列 I_n について、$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \dots$ がなりたつとする。このとき、

$$\bigcap_n I_n \neq \emptyset.$$

さらに、 I_n の長さを $\mathrm{length}(I_n)$ と書くとき、

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{length}(I_n)) = 0$$

がなりたつならば、 $\bigcap_n I_n$ はただ一点のみからなる。

定義 6.2. 数列 $\{a_n\}$ が与えられているとする。このとき、自然数の狭義増加列 $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ を定めて、

$$\{a_{n_j}; j = 1, 2, 3, \dots\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\}$$

で与えられるような数列を $\{a_n\}$ の部分列という。(教科書の 1.2.6 は少し書き間違いがあるので注意。但し第 3 刷以降は直っている。)

例えば

$$\{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}, a_{13} \dots\} = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$$

や

$$\{a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}, \dots\}$$

($\{a_n\}$ のうち素数番目のものをとりだしたもの),

$$\{a_2, a_4, a_8, a_{16}, a_{32}, a_{64}, a_{128} \dots\} = \{a_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$$

などはすべて $\{a_n\}$ の部分列である。

n_k が狭義増加列であることから、 $n_k \geq k$ が全ての k について成り立つ。このことから、直ちに次のことが従う。

補題 6.3. 数列 $\{a_n\}$ が c に収束するならば、その任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ も c に収束する。

定理 6.4. (“定理 1.9”)[ボルツァノ・ワイエルシュトラス] 有界な数列は、収束する部分列を持つ。

例えば、問題 2.1 の数列はそれ自体は収束しないが、収束する部分列をもつ。実際、$\{a_{10n}\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 に収束するし、$\{a_{10n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する。

問題 6.1. 補題 6.3 を ϵ-N 法を用いて証明せよ。

問題 6.2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を、 $a_1 = \sqrt{2}/2$ かつ

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (\text{ if } a_n < 1/2) \\ 2 - 2a_n & (\text{ if } a_n \geq 1/2) \end{cases}$$

で定義する。このとき、$\{a_n\}$ は収束する部分列を持つことを (今日証明した定理のうちのどれかを用いて) 証明しなさい。