$\boxed{\text{二項定理, 数 } e}$ まず二項定理について復習しておこう。

定義 5.1. 実数 n と 0 以上の整数 k とにたいして、

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

のことを、二項係数とよぶ。

高校では n が正の整数のときに良く登場して、そのときには $\binom{n}{k}$ は《場合の数》 ${}_nC_k$ と等しいのであった。

定理 5.2 (二項定理)**.** 正の整数 n について、次のことが成り立つ。

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

命題 5.3. $\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。その極限を (級数の記号を先走って使って)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

と書く。

定理 5.4. ("例 1.8")

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n)$$

とおく。このとき

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である。
(2) 任意の n にたいして、$a_n \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.
(3) $\{a_n\}$ はある正の値に収束する。

Proof.

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \end{aligned}$$

ここで最後の和に現れる項を $b_{n,k}$ と書くと、 k を固定するごとに、$b_{n,k}$ は単調増加で、$\frac{1}{k!}$ よりは小さい。

□

定義 5.5. 収束値

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

のことを e と書き、ネイピアの数とか、自然対数の底と呼ぶ。

命題 5.6. 上の定理のように $b_{n,k}$ を決めたとき、

(1) 任意の $N < n$ にたいして、$\sum_{k=0}^{N} b_{n,k} \le e$.
(2) 実は e は命題 5.3 の数と一致する。

命題 5.3 の和は大変早く収束する。

$$
\begin{aligned}
1/0! &= 1 \\
1/1! &= 1 \\
1/2! &= 0.5 \\
1/3! &= 0.166666666 \\
1/4! &= 0.041666666 \\
1/5! &= 0.008333333 \\
1/6! &= 0.001388888 \\
1/7! &= 0.000198412 \\
1/8! &= 0.000024801 \\
1/9! &= 0.000002755 \\
1/10! &= 0.000000275 \\
(\text{和}) &= 2.718281801 \\
(\text{参考}) \quad e &= 2.718281828
\end{aligned}
$$

問題 5.1. 長さが「ちょうど」 $5e$ もしくは $10e$ センチメートルの帯を鉛筆と定規等を用いて作図しなさい。帯には

$$
e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}
$$

の部分和のところで線を入れること。上の和のうちどの程度までを気にする必要があるだろうか? (楽しんでやること)

講義とレポート採点が終わったあとから気づいた注意: 上の書き方では誤解を招きますね。「等式

$$
e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + 0.5 + 0.16666 + \dots
$$

において、右辺の和がそれぞれどの割合で寄与しているかその様子を帯グラフで書け。但しグラフの長さは (定規ではかれる範囲で正確に) $5e$ ないし $10e$ センチメートルにせよ。」というほうがまだましな表現でした。スミマセン