解析学 IA 演習 NO.10

今回の演習では断らないかぎり、平面 $\mathbb{R}^2$ の座標関数として x, y, 空間 $\mathbb{R}^3$ の座標関数としては x, y, z を用いることにする。

問題 10.1. (各 1) a, b は正の実数とする。このとき次の関数の正方形 $D = [0, a] \times [0, b]$ における定積分 $\int_D f(x, y) d\mu (= \iint_D f(x, y) dxdy)$ をもとめなさい。(重積分は自由に累次積分に直して良い。)

(1) $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.
(2) $f(x, y) = \sin(x + y)$.
(3) $f(x, y) = x^k y^l$ (ただし k, l は正の整数。)
(4) $f(x, y) = e^{x+y}\cos(x)$.

問題 10.2. (各 1) 正の実数 x_1, x_2, y_1, y_2 が与えられていて、$x_1 < x_2$ かつ $y_1 < y_2$ がなりたっているとする。平面 $\mathbb{R}^2$ の点 $O = (0, 0)$, $A = (x_1, y_1)$, $C = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $B = (x_2, y_2)$ で囲まれる平行四辺形の内部を D とおく。このとき、

(1) $\iint_D dxdy$ を求めなさい。
(2) 正の整数 l, m に対して、 $\iint_D x^l y^m dxdy$ を求めなさい。

いずれも、変数変換の公式を 用いずに D 上の積分を累次積分のいくつかの和として表すことで解決すること。

問題 10.3. (各 1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ において、次の積分を求めなさい。ただし変数変換の公式は 1 変数の積分に限り用いても良い。

(1) $\iint_D dxdy$.
(2) $\iint_D xdxdy$.
(3) $\iint_D xydxdy$.
(4) $\iint_D x^l y^m dxdy$ (l, m は正の整数).

問題 10.4. (全部で 1) 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の領域 $D = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ における積分

$$\iiint_D x^l y^m z^n$$

(l, m, n は正の整数) を計算せよ。もっと一般に $\mathbb{R}^m$ の区間立方体

$$D = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times [a_3, b_3) \times \cdots \times [a_m, b_m)$$

における積分

$$\int_D x_1^{l_1} x_2^{l_1} x_3^{l_1} \ldots x_m^{l_m} dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$

を求めなさい。ただし、$l_1, l_2, \ldots, l_m$ は正の整数、$x_1, x_2, \ldots, x_m$ は $\mathbb{R}^m$ の座標関数であるとする。

問題 10.5. 正の定数 M があって、$\mathbb{R}^m$ 上の連続関数 $f(v)$ が

$$|f(v)| \leq \frac{M}{(1 + ||v||)^{2m}}$$

を満たすならば、$\mathbb{R}^m$ の任意の区間直方体 D (前問と同じもの) での $|f|$ の積分

$$\int_D |f| dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$

は (D によらず) $\pi^m M$ 以下であることを示しなさい。(π は円周率。π^m の代わりに適当な定数、たとえば 10^m で押えることができればそれでも本問の解答としては構わないこととする。)