解析学 IA 演習 NO.9

問題 9.1. $A \in M_{m,l}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k,l}(\mathbb{R})$ に対して、次の二条件は同値であることを示しなさい。

(1) $\forall v \in \mathbb{R}^l (Bv = 0 \implies Av = 0)$.
(2) $\exists L \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ があって、$A = LB$ がなりたつ。

$\mathbb{R}^l$ 上の共通の定義域を持つ (実数値もしくはベクトル値) 関数 f, g が与えられているとする。ラグランジュの未定乗数法は、$g(x) = 0$ を満たすような x のうちで $f(x)$ の停留値を議論するのに使われる。$g(a) = 0$ なる a で f が停留するとしよう。$g(x) = 0$ を満たす x の全体は

$$\{a + h; \quad (Dg)_a h = 0\}$$

なる空間 (接線ならぬ「接線形多様体」) で近似される。この空間上 f が停留するということは、

$$(Dg)_a h = 0 \implies (Df)_a h = 0$$

ということである。前問よりこれは $Dg|_a = LDf|_a$ をみたす行列 L が存在することと同値である。行列 L を「未定乗数」としてあらたな変数に組み込むのが素晴しいアイディアである。が、理論は二の次である。(だったら書くな。) 未定乗数法の最大の良さはその使い勝手の良さにある。以下の数問を参照。

問題 9.2. (各 1) $x^2 + y^2 = 1$ を満たす x, y について、$f(x) = xy$ の極大、極小を議論したい。

(1) $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ にたいして、$F_x(a, b, l) = 0, F_y(a, b, l) = 0, F_\lambda(a, b, l) = 0$ を同時に満足する a, b, l を求めなさい。
(2) 上のような (a, b, l) について、$f(x)$ が円周上の極大、極小点であるか (三角関数を用いずに) 調べなさい。
(3) 三角関数を用いて、上の結論を再確認しなさい。

問題 9.3. (実) 二次曲線 $g(x, y) = 7x^2 - 2xy + 31y^2 - 1 = 0$ 上の点のうち、原点からもっとも近い点ともっとも遠い点をそれぞれ求めなさい。(ヒント: $g(x, y) = 0$ なる条件下で $x^2 + y^2$ の停留条件を未定乗数法で求めよ。)

問題 9.4. 実二次曲線 $x^4 + y^4 = 1$ について、前問を繰り返しなさい。

問題 9.5. 実二次曲線 $x^3 + y^3 = 1$ について、前問を繰り返しなさい。(距離最小の点は存在するが、最大の点は...)

問題 9.6. 条件 $xy + yx + zx = 3$, $xyz = 1$ を満たす (x, y, z) のなかで、$f(x, y, z) = x + y + z$ の値の停留値を見たい。そこで

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda(xy + yz + zx - 3) + \mu(xyz - 1)$$

を考えて、$F_x, F_y, F_z, F_\lambda, F_\mu$ の共通零点をもとめ、続いて f の与条件下での停留点および停留値をもとめよ。

問題 9.7. (各 1) 次の式でさだまる陰関数 $y = \varphi(x)$ について、その微分 $\varphi'(x)$ を求めよ。(ヒント:小テスト No.09, 教科書 p.127 演習問題)

(1) $x^2 + y^2 = 1$.
(2) $7x^2 - 2xy + 31y^2 - 1 = 0$.
(3) $x^4 + y^4 = 1$.
(4) $x^3 + y^3 = 1$.

問題 9.8. (全部で 1) f は二変数の C^2 級関数と仮定する。このとき、

(1) 等式

$$f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)$$
$$=hk\int_0^1\left(\int_0^1 (f_y)_x(a+ht,b+ku)du\right)dt$$

と絶対積分評価を用いて、

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{hk}\left(f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)\right)$$
$$=(f_y)_x(a,b)$$

を示しなさい。

(2) $(f_y)_x(a,b)=(f_x)_y(a,b)$ を示しなさい。

問題 9.9. $\mathbb{R}^m$ の開集合 U 上定義された $\mathbb{R}^m$-値 C^1 関数 f と $\mathbb{R}^m$ の開集合 V 上定義された $\mathbb{R}^m$-値連続関数 g が与えられていて、$g(V)\subset V$ かつ $f\circ g=\mathrm{id}_V$ がなりたっていたとする。このとき、もし、点 $a\in U$ で $L=(Df)|_a$ が行列として可逆 (つまり、逆行列を持つ。言い換えると、$\det(DL)\neq 0$) だったとすると、g は $b=f(a)$ において微分可能であって、

$$Dg|_b=L^{-1}$$

がなりたつことを示しなさい。

(ヒント:

$$g(b+k)=g(b)+L^{-1}\cdot k+o(||k||)$$

がなりたつことを示せば良い。$x=g(b+k)$ とおけば、

$$k=(b+k)-b=f(x)-f(a)=L\cdot(x-a)+o(||x-a||)=L\cdot(x-a)+o(||g(b+k)-g(b)||).$$

あとは g の連続性に着目すれば良い。)

問題 9.10. 本問では、 $M_n(\mathbb{R})$ が行列ノルムに関して完備であることと、行列ノルムの (行列ノルムに関する) 連続性を自由に用いて良い。

(1) $H\in M_n(\mathbb{R})$ が、 $||H||<1$ (行列ノルム) を満たせば、

$$S_k=1_n+H+H^2+H^3+\dots H^k$$

とおくと、$\{S_k\}$ は行列ノルムに関してコーシー列であることを示しなさい。

(2) 上の仮定の下で、1_n-H が逆元を持つことを示しなさい。

(3) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ni X\mapsto X^{-1}\in M_n(\mathbb{R})$ の 1_n における一次近似が

$$(1_n+H)^{-1}=1_n^{-1}+(-H)+o(||H||).$$

で与えられることを示しなさい。

(4) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ni X\mapsto X^{-1}\in M_n(\mathbb{R})$ の A における一次近似が

$$(A+H)^{-1}=A^{-1}+(-A^{-1}HA^{-1})+o(||H||).$$

で与えられることを示しなさい。

本問は $X\mapsto X^{-1}$ の A での微分係数が $-A^{-1}\bullet A^{-1}$ (つまり $H\mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ なる線型写像) で与えられることを意味している。