

解析学 IA 演習 NO.8

問題 8.1. (各 1) 一変数関数 $f(x) = x^2 - 2$ にたいして、Newton 法を用いることにより、 $\sqrt{2}$ の近似値を以下のようにして求めよ。

- (1) $\sqrt{2}$ の近似値 $a(a \neq 0)$ にたいし、 f の a での接線 ℓ の方程式を求め、 ℓ と x 軸との交点の x 座標を $g(a)$ と置こう。 $g(a)$ を具体的に a の式で書きなさい。
- (2) $a > 1$ ならば $g(a) > 1$ かつ

$$|g(a)^2 - 2| < \frac{1}{4}|a^2 - 2|^2$$

であることを示しなさい。

- (3) $a \in [1, 4]$ ならば $g(a) \in [1, 4]$ かつ

$$|g(a) - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|a - \sqrt{2}|^2$$

であることを示しなさい。

- (4) $a_1 = 1, a_{n+1} = g(a_n)$ の最初の数項と、その小数展開 (意味のある桁までで良い。) を求めなさい。((1)-(3) が解けたあとにとくこと。)

問題 8.2. (各 1) 一変数関数 $f(x) = x^3 - 5$ について、前問と同様のことを考えよう。

- (1) $\sqrt[3]{5}$ の近似値 a に対して、 f の a での接線と x 軸との交点の x 座標 $g(a)$ を計算しなさい。
- (2) a が適当な範囲内ならば、 a より $g(a)$ のほうが $\sqrt[3]{5}$ のより良い近似であることを示しなさい。

問題 8.3. 二変数関数 $f(x, y) = e^x \sin(y)$ のグラフ Γ_f について、点 $(a, b, f(a, b))$ における Γ_f の接平面の方程式を書きなさい。

問題 8.4. 一変数関数 $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ のグラフ Γ_f について、点 $(t_0, \cos(t_0), \sin(t_0))$ における Γ_f の接線の方程式を書きなさい。

問題 8.5. (各 1) 二変数関数ベクトル値関数

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - 4 \\ xy - 1 \end{pmatrix}$$

について、

- (1) f のグラフの $(a, f(a))$ における接平面 α の方程式を求めよ。 v, w を変数とすれば、ヒント: $w - f(a) = (Df|_a) \cdot (v - a)$ の形である。言い替えると、 a の成分を (a_1, a_2) , v の成分を (x, y) としたとき、 $w - f(a) = f_x(a)(x - a_1) + f_y(a)(y - a_2)$ の形である。 v, w, f はそれぞれベクトルであることを注意すること。
- (2) α と平面 $\{v = 0\}$ との交点の座標を求めよ。それを $g(a)$ と書こう。
- (3) ベクトルの列 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ を、 $v_1 = e_1$ (基本ベクトル)、 $v_{j+1} = g(v_j)$ で定義する。このとき、このベクトル列の最初の数項を (成分を小数を用いて) 書きなさい。
- (4) 上のベクトル列 $\{v_j\}$ の収束先を求めなさい。(厳密な議論は問わないことにする。)

問題 8.6. 対角行列 $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ について、その行列ノルム

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

を求めなさい。