解析学 IA 演習 NO.7

問題 7.1. (全部で 1 点) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ と $(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の合成関数に関する偏微分の連鎖律は

$$(※)\qquad \begin{cases} f_x = f_u\cdot u_x + f_v\cdot v_x \\ f_y = f_u\cdot u_y + f_v\cdot v_y \end{cases}$$

もっと正確に書くと、上の式は

$$(f(u(x,y),v(x,y)))_x = f_u(u(x,y),v(x,y))\cdot u_x(x,y) + f_v(u(x,y),v(x,y))\cdot v_x(x,y)$$
$$(f(u(x,y),v(x,y)))_y = f_u(u(x,y),v(x,y))\cdot u_y(x,y) + f_v(u(x,y),v(x,y))\cdot v_y(x,y)$$

の意味である。同様にして、

(1) $f(u,v,w)$ (u,v,w は 2 変数 (x,y) の関数)
(2) $f(u,v,w)$ (u,v,w は 3 変数 (x,y,z) の関数)
(3) $f(u,v)$ (u,v は 3 変数 (x,y,z) の関数)

の偏微分の連鎖律をそれぞれ (※) の形で書き出しなさい。詳しい計算や、証明は問わない。

問題 7.2. (全部で 1 点) 上の問題を次の場合について繰り返しなさい。ただし、「 t に関する偏微分」は適宜「t に関する微分」に読み替えること。

(1) $f(u)$ (u は 1 変数 t の関数)
(2) $f(u,v)$ (u,v は 1 変数 t の関数)
(3) $f(u,v,w)$ (u,v,w は 1 変数 t の関数)
(4) $f(u,v,w,z)$ (u,v,w,z は 1 変数 t の関数)

問題 7.3. $a(f,g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(f(u,v),g(u,v)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ と $(u(x,y),v(x,y)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の合成関数

$$a(f(u(x,y),v(x,y)),g(u(x,y),v(x,y)))$$

の x,y それぞれに関する偏微分を、前二問のように書き下しなさい。

問題 7.4. (それぞれ 1) $\mathbb{R}^n$ の二つの点 (縦ベクトル) $x={}^t(x_1,x_2,\ldots,x_n), a={}^t(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ に対して、

(1) $f(0)=a$ かつ $f(1)=x$ となるような、(定数項をもつ) 一次式で定まる写像

$$g(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$$

を x,a を用いて表しなさい。

(2) $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で、x,a を含む線分 を含むようなものが与えられていて、$f:U\to\mathbb{R}$ は C^1 級であるとする。このとき

$$f(g(t))$$

の t に関する微分を連鎖律を用いて求めなさい。

(3) 微分積分学の基本定理

$$a(1)-a(0)=\int_0^1 a'(t)dt$$

の a として、$f\circ g$ を採用して、でてきた結果を書きなさい。

問題 7.5. (1) 微積分学の基本定理を用いて

$$e^x = 1 + x\int_0^1 e^{xt}dt$$

を示しなさい。

(2)

$$e^x = 1 + x\int_0^1 \left(1 + xt\int_0^1 e^{xtu}du\right)dt$$

であることを示し、ついで

$$e^x = 1 + x + x^2\int_0^1 \left(t\int_0^1 e^{xtu}du\right)dt$$

を示しなさい。

(3) 前小問を繰り返すことにより、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 \cdot (\text{三度積分を行った式})$$

の形の式を得なさい。

(4)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} + O(|x|^3)$$

を示しなさい。

問題 7.6. (各 1) 前問の真似をして、次の各問に答えなさい。

(1) $\sin(x) = x\int_0^1 \cos(xt)dt$ を示しなさい。

(2) $\cos(x) = 1 - x\int_0^1 \sin(xt)dt$ を示しなさい。

(3) 前問の (2) をマネて、$\sin(x)$ を二度の積分を用いて書きなさい。

(4) 前問の (3) をマネて、$\sin(x)$ を三度の積分を用いて書きなさい。

(5) 前問の (4) をマネなさい。

問題 7.7. (各 1) 前の 2 問は積分を何度も行う必要があって、煩わしい。部分積分をうまく利用することにより、一回の積分ですますことができる。条件の繁雑さを避けるため、この問題では f は $\mathbb{R}$ 全体で定義された一変数実数値の C^∞ 級関数であると仮定する。(但しベクトル値であっても、 証明は一字一句違わない。)

(1) 微分積分学の基本定理

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

を f' にも適用し、($f'(t) = f'(0) + \int_0^t \ldots ds$ の形の式を得た後、) それを用いて、

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x\int_0^t f''(s)dsdt$$

を示しなさい。

(2) 部分積分をうまく利用することにより、

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(s)dt$$

を示しなさい。

(3) もう一度同様のことを繰り返すことにより、

$$\text{(T2)} \qquad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)dt$$

を示しなさい。

一般の n に対しては

$$\text{(Tn)} \qquad f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\cdot x^j + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

が成り立つ。

問題 7.8. (各 1) $\mathbb{R}^2$ で定義された C^∞ 級二変数関数 $g(x,y)$ が与えられているとして、

$$f(t) = g(x+th, y+tk)$$

に対して、

(1) (T2) を適用した式を (偏微分を用いて) 書き下しなさい。
(2) 一般の n にたいして、(Tn) を適用した式を (偏微分を用いて) 書き下しなさい。(証明はしなくて良い。)

問題 7.9. ベクトル値関数

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

に

(1) (T2)(のベクトル値版) を適用した式を書き下しなさい。
(2) (Tn)(のベクトル値版) を適用した式を書き下しなさい。

いずれも証明はしなくても良い。

問題 7.10. (各 1) 二変数ベクトル値関数

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y\cos(x) \\ y\sin(x) \end{pmatrix}$$

にたいして、(a,b) を固定したとき、

(1) $f(a+h, b+k)$ を h,k について 1 次の項まで近似した式を書きなさい。すなわち、

$$f(a+h,b+k) = c_{00} + c_{10}h + c_{01}k + o(||(h,k)||)$$

をみたすベクトル $c_{00}, c_{10}, c_{01} \in \mathbb{R}^2$ を求めなさい。

(2) $f(a+h, b+k)$ を h,k について 2 次の項まで近似した式を書きなさい。すなわち、

$$f(a+h,b+k) = c_{00} + c_{10}h + c_{01}k + c_{20}h^2 + c_{11}hk + c_{02}k^2 + o(||(h,k)||^2)$$

をみたすベクトル $c_{00}, c_{10}, \ldots, c_{02} \in \mathbb{R}^2$ を求めなさい。

いずれも剰余項は (できれば) 積分の形で出すこと。

問題 7.11. (各 1) 前問の (1),(2) を

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$$

に対して繰り返しなさい。(前問よりやさしいが、それゆえかえって戸惑うかも知れない。) なお、「剰余項」は積分で出さなくても良い。

問題 7.12. (各 1) 前問の (1),(2) を二変数関数

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x^3 + y^3$$

に対して繰り返しなさい。

問題 7.13. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \le 0, x+y \le 2\}$ なる閉集合で定義された関数

$$f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$$

に対して、

(1) f_x ,f_y を計算し、それらがともに 0 になる点 (a,b) で、$f(a,b) \neq 0$ になるものを求めなさい。
(2) 上の a,b で、f を二次近似しなさい。
(3) 周の長さが 2 の三角形のうち、面積が最大のものはなにか。(ヒント:ヘロンの公式)