解析学 IA 演習 NO.5

問題 5.1.

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$$

について、f の (r_0, θ_0) における微分 $Df_{(r_0,\theta_0)}$ とその行列式 $\det(Df_{(r_0,\theta_0)})$ を求めよ。

問題 5.2.

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (r, \theta, \phi) \mapsto (r\cos(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\phi)) \in \mathbb{R}^3$$

について、f の (r_0, θ_0, ϕ_0) における微分 $Df_{(r_0,\theta_0,\phi_0)}$ とその行列式 $\det(Df_{(r_0,\theta_0,\phi_0)})$ を求めよ。

問題 5.3. (各 1) $f(x, y) = x^2 y$ にたいして、

(1) $x = u, y = u + v^3$ とおいて、$f(x, y)$ を u, v で書き表しなさい。それを $g(u, v)$ とおく。すなわち、

$$g(u, v) = f(u, u + v^3).$$

(2) 偏導関数 g_u, g_v をそれぞれ求めよ。

(3) 微分の連鎖律

$$g_u = f_x x_u + f_y y_u, \quad g_v = f_x x_v + f_y y_v.$$

をこの場合に確かめなさい。

問題 5.4. (各 1) $f(x, y) = \sin(x)y$ にたいして、問題 5.3 の (2) と (3) を繰り返しなさい。

二変数 (x, y) の関数 $f(x, y)$ に関する偏微分方程式

$$f_x = 0$$

は、「f は y を止めて x を動かしたときに定数である」ということを意味しているから、その一般解は、

$$f(x, y) = g(y)$$

($g(y)$ は「任意の」一変数関数) というかたちで与えられる。以下の問題はこれを踏まえて答えること。

問題 5.5. (各 1) 二変数 (x, y) の関数 f に関する偏微分方程式

$$f_x - f_y = 0$$

を解きたい。

(1) $x = -u + v, y = u$ と変数変換して、上記方程式を $g(u, v) = f(-u + v, u)$ に関する方程式に書き直しなさい。

(2) この偏微分方程式の一般解を求めなさい。

問題 5.6. 二変数 (x, y) の関数 f に関する偏微分方程式

$$f_x - 2f_y = 0$$

を解きなさい。(ヒント:x, y を適当に一次変換してみよ。)

問題 5.7. 三変数 (x, y, z) の関数 f に関する偏微分方程式

$$f_x - 2f_y + 3f_z = 0$$

を解きなさい。

問題 5.8 (配った問題は間違っていたので、欠番)**.**

問題 5.9. (各 1) 微分可能な一変数関数 $g(t)$ が与えられているとする。このとき、

(1) $f(x, y) = g(x+y^2)$ なる二変数関数に対して、偏導関数 f_x, f_y を g (とその微分) を用いて書き、$2yf_x - f_y = 0$ をしめしなさい。

(2) (全小問とは無関係に一般の二変数関数 f に関して、) 偏微分方程式 $2yf_x - f_y = 0$ を (適当な変数変換を用いて) 解きなさい。(ヒント:一方の変数には $u = x + y^2$ を選べば良い。もう一方の変数 v としては x か y のいずれかをとれば良いわけだが、x, y が u, v から逆に解けるほうが気持が良い.)

問題 5.10. (各 1) 微分可能な一変数関数 $g(t)$ が与えられているとする。このとき、

(1) $f(x, y, z) = g(x + y^2 + z^3)$ なる三変数関数に対して、偏導関数 f_x, f_y, f_z を g (とその微分) を用いて書き、

$$f_y = 2yf_x$$
$$f_z = 3z^2 f_x$$

をしめしなさい。

(2) (全小問とは無関係に一般の三変数関数 f に関して、) 連立偏微分方程式

$$f_y = 2yf_x$$
$$f_z = 3z^2 f_x$$

を (適当な変数変換を用いて) 解きなさい。