$\boxed{\text{一般論}, \forall \text{ と } \exists}$

前回までに、

任意の複素数複素数 z, w にたいして、$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ がなりたつということを証明した。

これは、

$$\overline{(1+\sqrt{-1})\cdot(2+4\sqrt{-1})} = \overline{1+\sqrt{-1}}\cdot\overline{2+4\sqrt{-1}}$$
$$\overline{(2+3\sqrt{-1})\cdot(1+\pi\sqrt{-1})} = \overline{2+3\sqrt{-1}}\cdot\overline{1+\pi\sqrt{-1}}$$
$$\overline{(\sqrt{2}+\sqrt{-1})\cdot(5+\sqrt{-1})} = \overline{\sqrt{2}+\sqrt{-1}}\cdot\overline{5+\sqrt{-1}}$$
$$\cdots$$

を全てまとめて証明したことと同じである。このように、文字を用いていろいろな場合をひっくるめて証明してしまうと効率的に議論を運ぶことができる。「任意の複素数 z, w に対して」ということを式で表現するためには $\forall$ という記号をもちいて、

$$\forall z \in \mathbb{C} \forall w \in \mathbb{C} \quad (\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w})$$

とか、

$$(☆) \qquad \overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w} \quad (\forall z \in \mathbb{C} \forall w \in \mathbb{C})$$

と書く。

これが正しいということは、「水の洩れるような穴がない」すなわち、

$$(★) \qquad \overline{zw} \neq \overline{z}\cdot\overline{w} \quad (\exists z \in \mathbb{C} \exists w \in \mathbb{C})$$

のようなことが起こらない、ということである。(★) と (☆) は、互いに一方の**否定**である。相手が間違っているということを示すには相手の主張の否定を証明することになる。

$\forall$ と $\exists$ の順番 (変数の登場順序) にも注意しよう。

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists w \in \mathbb{C} \quad (zw = 1)$$

は正しい命題であるが、

$$\exists w \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (zw = 1)$$

はまったく正しくない命題である。

$\forall$ や $\exists$ を含むような命題の否定命題を作るのはたいへん簡単な規則があることにも注意しよう。

たとえば、S は数の集合であるとして、

$$(\mathrm{AS}) \qquad \forall x \in S \exists y \in S \quad (2y = x)$$

の否定は

$$(\mathrm{BS}) \qquad \exists x \in S \forall y \in S \quad (2y \neq x)$$

であることを、確かめて頂きたい。

例題 4.1. $S = \mathbb{Z}$ のときと $S = \mathbb{R}$ のときのそれぞれに対して、(AS) と (BS) のどちらが正しいか、考えてみなさい。

定義 4.1. 0 でない複素数 z と、実軸の正の部分のなす角を z の**偏角**といい、$\arg(z)$ で書き表す。

偏角は一意には定まらない、ということに注意しよう。θ が z の偏角なら、 $\theta+2\pi$ もそうである。すなわち、z の偏角の全体は

$$\theta + 2\pi\mathbb{Z}$$

という集合をなすことが分かる。そこで、偏角は $0 \le \arg(z) < 2\pi$ の範囲で選ぶ (もしくは $-\pi \le \arg(z) < \pi$ の範囲で選ぶ) ということが良く行われるが、これはいつもそうしなければならないというわけではない。

定理 4.1. 複素数 $z,\ w$ に対して、

(1) $|zw| = |z|\cdot|w|$
(2) z, w がどちらも 0 でないとき、 $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$
(3) z, w がどちらも 0 でないとき、 $\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$

が成り立つ。

補題 4.1. 偏角が θ であるような複素数 z は

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + \sin(\theta)\sqrt{-1}\right)$$

と書ける。*(これを z の* **極表示** *という。)*

とくに、

定理 4.2. 任意の正の整数 n にたいして、

$$z^n = 1$$

をみたす複素数がちょうど n 個あって、それらは

$$\cos(\frac{2\pi k}{n}) + \sqrt{-1}\sin(\frac{2\pi k}{n}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

である。これらは 1 の n 乗根と呼ばれる。

問題 4.1. 複素数平面 $\mathbb{C}$ 上にあなたの好きな一点 z (ただし、0 や 1 とは異なるもの) をとり、$0,\ z,\ -\omega z$ をプロットして線分で結んでみなさい。どんな図形ができるでしょうか。

ただし、

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\left(= (-\frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{-1}\right)$$

とします。