複素数と論理 (学問基礎数学コース演習) NO.3

$\boxed{\text{「or」と「ならば」}}$ 前回 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ のときや $A, B \in \mathbb{C}$ のとき、それぞれについて

$$AB = 0 \implies A = 0 \text{ or } B = 0$$

かどうか、ということについて尋ねたが、数学 (に限らず、論理的な話が必要な世界) では、言葉のアヤや「行間を読む」という曖昧さを排除するため、「or」と「 $\implies$ (ならば)」などのの意味はいつでもつぎのように使うように決まっている。

定義 3.1. 命題 P にたいし、その真理値は、P が真のとき 1, P が偽のとき 0 で定める。

定義 3.2. 命題 P,Q にたいして、その真理値を p,q とするとき、

(1) 「P and Q」の真理値は $\min(p, q)$ である。
(2) 「P or Q」の真理値は $\max(p, q)$ である。
(3) 「not P」の真理値は $1 - p$ である。
(4) $P \implies Q$ の真理値は「(not P) or Q 」の真理値と同じになるように定義する。

とくに注意が必要なのは、「P or Q」 と 「$P \implies Q$」の使い方である。

- 「P or Q」は、P と Q がともに正しい時もただしい。
- 「P $\implies$ Q 」は P が間違っていれば、Q の真偽にかかわらず正しい。

複素数を「数」の仲間として認めるのにさいし、複素数の全体が、$M_2(\mathbb{R})$ はもたない良い性質をもつということが前回の問題でわかる。
つぎは、複素数を視覚的に理解するという段階に進もう。それには次のような意義がある:

(1) 問題を把握しやすくする。
(2) 問題の直観的な見方を強化し、間違いをしにくくする。

定義 3.3. 平面 $\mathbb{R}^2$ (のコピー) を一つ用意し、複素数 $a + b\sqrt{-1}$ に点 (a, b) を対応させたものを**複素平面**と呼ぶ

複素平面自体のことも $\mathbb{C}$ とよぶことがある。
複素数の加法はベクトルの加法と同じだから、次のことが成り立つ。

補題 3.1.

(1) 複素数 z, w に対して、$z + w$ は、$0, z, z + w, w$ が平行四辺形になる位置にある。
(2) 複素数 z にたいして、 $-z$ は 0 に関して z と点対称な位置にある。

複素数の乗法はどうだろうか、完全な答えは来週与えることにして、今週は次の補題と問題をやって頂こう。

補題 3.2. 複素数 z にたいして、 $\sqrt{-1}z$ は z を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ反時計回りに回転させた位置にある。

問題 3.1. $z = 1 + \sqrt{-1}$ にたいし、$1, z, z^2, z^3, z^4, z^5$ を複素平面上にプロットした図を描いてみよ。