

複素数と論理 (学問基礎数学コース演習) NO.1

「花は桜木、人は武士」などという言葉があるけれど、数学者にとって数といえば複素数、関数といえば複素数値関数である。少なくとも実数値関数の範囲では不便で、フーリエ変換のような基本的な道具は複素数値関数の範囲で初めてキレイに扱える。

定義: 数学の基本的なルール

この講義では実数の定義と諸性質については既知とする。実数体上の線形代数の初歩も仮定しよう。実数の全体の集合(実数直線)を \mathbb{R} と書く。

複素数の定義にはいろいろな方法がある。現代数学では(と言ってもたっぷり100年以上前から)数それ自身にしても、その和や積にしても「自然に与えられた」とは解釈しない。人間が自分たちで決めるのだ。ただし、一回決めたらそれは守らなければならない。日常生活の、時刻あわせの例などを考えてみるとよい。

つぎのようなことをやりたいのだが:

定義 1.1. \mathbb{R} に、 $J^2 = -1$ を満たすような数 J を付け加え、加減乗除がそのなかでできるようにした集合を \mathbb{C} と呼ぶ。

この定義は明解ではない。(ただし、代数学 IB で環の理論を勉強した後ならば正当化できる。)

初級の段階で明解な定義をするためには、次のような方法をとることもある。

定義 1.2. 実数 a, b にたいして、

$$(a, b)_{\text{complex}} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

の形の二次行列(と同じものだが区別するためそのコピー¹)を複素数と呼び複素数の全体を \mathbb{C} と書く。

この講義ではこの定義を採用しよう。この定義では複素数の和、積はまだ与えられていない。現代数学では(と言ってもたっぷり100年以上前から)数それ自身にしても、その和や積にしても「自然に与えられた」とは解釈しない。人間が自分たちで決めるのだ。ただし、一回決めたらそれは守らなければならない。日常生活の、時刻あわせの例などを考えてみるとよい。

補題 1.1. 複素数の和と積を、行列の和や積で定義すると、それらはまた複素数であり、

$$\begin{aligned} (a, b)_{\text{complex}} + (c, d)_{\text{complex}} &= (a + c, b + d)_{\text{complex}} \\ (a, b)_{\text{complex}} \times (c, d)_{\text{complex}} &= (ac - bd, ad + bc)_{\text{complex}} \end{aligned}$$

本来、数の和や積を勝手に決めただけからと言ってそれがよい計算規則を満たすとは限らない。ところがこの講義での定義は行列の演算を流用しているので、ある程度の計算規則をみたすことが自動的に保証される。次の補題にまとめておこう。

補題 1.2. 次のことが成り立つ。

(1) (和に関する計算規則)

(a) (和の結合法則) 任意の複素数 z_1, z_2, z_3 にたいして、

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

¹この講義では普通の行列は丸括弧で書く。それに対してそのコピーを角括弧で書いた。

- (b) (0 元の存在) 複素数 $(0, 0)_{\text{complex}}$ のことを単に 0_{complex} と書くと

$$0_{\text{complex}} + z = z, \quad z + 0_{\text{complex}} = z.$$

- (c) (マイナス元の存在) 任意の複素数 $z = (a, b)_{\text{complex}}$ に対して、 $(-a, -b)_{\text{complex}}$ のことを $-z$ と書くと、

$$z + (-z) = 0_{\text{complex}} \quad (-z) + z = 0_{\text{complex}}.$$

- (d) (和の可換性) 任意の複素数 z, w に対して、

$$z + w = w + z.$$

- (2) (積に関する計算規則)

- (a) (積の結合法則) 任意の複素数 z_1, z_2, z_3 に対して、

$$(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3).$$

- (b) (積の単位元の存在) 複素数 $(1, 0)_{\text{complex}}$ のことを 1_{complex} と書くと、任意の複素数 z に対して、

$$1_{\text{complex}} \times z = z, \quad z \times 1_{\text{complex}} = z.$$

- (3) (分配法則) 任意の複素数 z_1, z_2, w に対して、

$$(z_1 + z_2) \times w = z_1 \times w + z_2 \times w, \quad w \times (z_1 + z_2) = w \times z_1 + w \times z_2.$$

命題 1.1. 複素数の全体は、更に次の性質を持つ。

- (1) (積の可換性) 任意の複素数 z, w に対して

$$zw = wz$$

- (2) (0 以外の元の可逆性) 0 以外の元 $z = (a, b)_{\text{complex}}$ に対して、 $z^\Delta = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})_{\text{complex}}$ と書くと、

$$z \times z^\Delta = 1_{\text{complex}}, \quad z^\Delta \times z = 1_{\text{complex}}$$

がなりたつ。

問題 1.1. 次の二つのことについて答えなさい。

- (1) 上の命題の「積の可換性」の部分を実験にしながら証明しなさい。
 (2) 次のことは正しいだろうか？理由を挙げて述べなさい。
 「任意の実行列 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ に対して、 $AB = BA$ 。」

補題 1.1, 補題 1.2 と命題 1.1 をまとめて、複素数の全体 \mathbb{C} は体 (たい) をなすという。そこで、 \mathbb{C} のことを複素数体と呼ぶ。

定義 1.3. 実数 a に対して、 $(a, 0)_{\text{complex}}$ を対応させるとこの対応は 1 対 1 で、和、積を保つ。そこで今後はこの対応により \mathbb{R} を \mathbb{C} の部分集合とみなす。とくに、 1_{complex} は 1 と同一視される。

補題 1.3. $(0, 1)_{\text{complex}}$ のことを J と書くと、

- (1) $J^2 = -1$.
 (2) 任意の $(a, b)_{\text{complex}}$ は

$$(a, b)_{\text{complex}} = a + bJ$$

と書くことができる。

まとめると、 \mathbb{C} とは \mathbb{R} に、 $J^2 = -1$ を満たすようなあらたな「数」 J を付け加えた体である、ということになる。つまり、定義 1.1 と冒頭に書いたものは定義 1.2 のもとでは定義ではなく、定理になる。

数学は組み立てていくモノであるから、どこが出発点で、どのように作っていくかを意識することが大変重要である。