

代数学演習 I 問題 NO.10

一意分解環・単項イデアル整域・ユークリッド整域編 (2)

問題 10.1. 単項イデアル整域 R の元 a, b について、 R のイデアル $I = (a, b)$ は、(R が単項イデアル整域だから、) ある一つの元 d で生成されるイデアル (d) に一致する筈です。この d は a, b の最大公約元であること、すなわち、

- (1) d は a, b の公約元である。(つまり $a = da', b = db'$ となる $a', b' \in R$ が存在する。)
- (2) $d' \in R$ が a, b の公約元ならば、 d' は d の約元である。

ということを示しなさい。

上の問題により、単項イデアル整域では、「最大公約元」を、数のときと同様に扱えます。

問題 10.2. α を $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の素元とします。このとき、 $|\alpha|^2$ は素数か、素数の 2 乗かのいずれかであることを示しなさい。(ヒント: 素数 $p \in \mathbb{Z}$ が $|\alpha|^2$ の約数ならば、 $p|\alpha\bar{\alpha}$. p と α との最大公約元をとってみなさい。)

ユークリッド環においては、《ユークリッドの互除法》によって最大公約元を求めることができます。手始めに次の問題をどうぞ。

問題 10.3. 次の環 R の二つの元の最大公約数をユークリッドの互除法により求めなさい。

- (1) $R = \mathbb{Z}; 100010, 10124$
- (2) $R = \mathbb{C}[X]; X^{10} - 1, X^{12} - 1$

例題 10.1. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ において、 $3 + 4\sqrt{-1}, 15$ の最大公約元を求めなさい。

$|15| = 15 > 5 = |3 + 4\sqrt{-1}|$ だから、まず 15 を $3 + 4\sqrt{-1}$ で割ってみる。

$$\frac{15}{3 + 4\sqrt{-1}} = \frac{9 - 12\sqrt{-1}}{5} = 1.8 - 2.4\sqrt{-1}$$

この商にもっとも近いのは $2 - 2\sqrt{-1}$ 。

$$10 - (3 + 4\sqrt{-1})(2 - 2\sqrt{-1}) = 1 - 2\sqrt{-1}$$

ゆえに、15 を $3 + 4\sqrt{-1}$ で割った《余り》は $1 - 2\sqrt{-1}$ 。こんどは $3 + 4\sqrt{-1}$ を $1 - 2\sqrt{-1}$ で割る。割り切れるので、答えは $1 - 2\sqrt{-1}$ 。

問題 10.4. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ において、次の各組の最大公約元を求めなさい。

- (1) $12 + 36\sqrt{-1}, 5 + 13\sqrt{-1}$
- (2) $7 + 8\sqrt{-1}, 226$

問題 10.5. $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ において、次の各組の最大公約元を求めなさい。

- (1) $2 + 3\sqrt{-2}, 11 + 22\sqrt{-2}$
- (2) $5 + 3\sqrt{-2}, 129$

問題 10.6. $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$ の次の元を簡単にしなさい。

$$\bar{X}^5 + 2\bar{X}^4 + 3\bar{X} + 2$$

問題 10.7. $\mathbb{Q}[X]/(X - 1)$ の元 \bar{X}^{100} を簡単にしなさい。

問題 10.8. 環 $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ の元 $a\bar{X} + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$, $(a, b) \neq (0, 0)$) の逆元を (それが存在する場合には) 求めなさい。この環は体だろうか。

問題 10.9. 環 $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1)$ の元 $a\bar{X} + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$, $(a, b) \neq (0, 0)$) の逆元を (それが存在する場合には) 求めなさい。この環は体だろうか。

問題 10.10. $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 5)$ の元 $(\bar{X} + 1)^3$ を簡単にしなさい。

問題 10.11. (1) 10 進数 $123456789(10) = 1 \times 10^8 + 2 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9$ を 9 で割った余りを求めなさい。

(2) 7 進数 $135246(7) = 1 \times 7^5 + 3 \times 7^4 + 5 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 4 \times 7 + 6$ を 6 で割った余りを求めなさい。

(3) 16 進数

147ad258be369cf(16)

($= 1 \cdot 16^{14} + 4 \cdot 16^{13} + 7 \cdot 16^{12} + 10 \cdot 16^{11} + 13 \cdot 16^{10} + 2 \cdot 16^9 + 5 \cdot 16^8 + 8 \cdot 16^7 + 11 \cdot 16^6 + 14 \cdot 16^5 + 3 \cdot 16^4 + 6 \cdot 16^3 + 9 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16 + 15$)

を 15 で割った余りを求めなさい。(a=10,b=11,c=12,d=13,e=14,f=15; コンピュータの世界では 147ad258be369cf(16) のことを 147ad258be369cfh とか 0x147ad258be369cf と書きます。

(4) 多項式 $X^{14} + 3X^5 + 7X^2 + 8$ を $X - 1$ で割った余りを求めなさい。

問題 10.12. \mathbb{Z} に No.1 の問題 1.7, 1.8 で定義された和田, 積 \boxtimes を導入した環を R とするとき、

(1) $1_R = 6$ であることを確認し、正の整数 n にたいして、

$$n_R = \overbrace{1_R + 1_R + 1_R + \cdots + 1_R}^n (= \overbrace{6 \boxtimes 6 \boxtimes 6 \boxtimes \cdots \boxtimes 6}^n)$$

の値を求めなさい。

(2) \mathbb{Z} から R への準同形写像を作りなさい。

(3) $\mathbb{Z} \cong R$ であることを示しなさい。