代数学演習 I 問題 NO.5

イデアルの例とイデアルによる剰余環 (2), 行列算編

問題 5.1. (各 1) I を $\mathbb{Z}$ のイデアルとします。この時、

(1) a, b が I の元で、a が正の数ならば、b を a で割った余り r も I の元であることを示しなさい。
(2) $I = 0$ のときを除くと、I の元の中で正で最小のものが存在します。これを a_0 とおくと、I の任意の元は a_0 で割り切れることを示しなさい。
(3) $I = a_0\mathbb{Z}$ であることを示しなさい。

問題 5.2. (各 1) I を $\mathbb{C}[X]$ のイデアルとします。この時、

(1) f, g が I の元で、f が 0 でないならば、g を f で割った余り r も I の元であることを示しなさい。
(2) $I = 0$ のときを除くと、I の元の中で次数が最小のものが存在します。これを f_0 とおくと、I の任意の元は f_0 で割り切れることを示しなさい。
(3) $I = f_0\mathbb{C}[X]$ であることを示しなさい。

問題 5.3. (各 1)

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群は全て $\mathbb{Z}$ のイデアルであることを示しなさい。
(2) $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群をすべて求めなさい。
(3) $(\mathbb{C}[X], +)$ の部分群で、$\mathbb{C}[X]$ のイデアルではないものの例を挙げなさい。

問題 5.4. a を複素数とします。このとき、

(1) 一変数多項式 $f(X)$ を $X - a$ で割ったときの余りは $f(a)$ であることを示しなさい。
(2) $\mathbb{C}[X]/(X - a)\mathbb{C}[X]$ のすべての元は、ある複素数 c (の同値類) と等しいことを示しなさい。

環 R に対して、その元を成分にもつ行列を考えることができ、通常の意味の和、差、積が (サイズがあっているという条件のもとで) 定義されて、一年生で習う線形代数のかなりの部分がそのまま正しい。

$$M_n(R) = \{R \text{ の元を成分にもつ } n \times n \text{ 行列}\}$$

とおくと、これは (可換ではない) 環である。その単位元は 1_n (n 次の単位行列).

問題 5.5. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の元を成分にもつ行列の積

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

を計算し、できるだけ簡単な形、すなわち各成分の絶対値が 14 以下の整数によって表されている形になるように直しなさい。

問題 5.6. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の元を要素にもつ行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

問題 5.7. $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ の元を要素にもつ行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

問題 5.8. $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ の元を要素にもつ行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を計算しなさい。

問題 5.9. (可換とは限らない) 環 R の元を成分にする m, n 行列 A と n, m 行列 B とにたいして、

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

が成り立つことを証明しなさい。

問題 5.10. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の元を要素にもつ行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列は存在するだろうか。行列式の乗法性

$$\det(X)\det(Y) = \det(XY)$$

に基づいて答えなさい。

問題 5.11. どんな整数 n に対しても、

$$AB - BA = 1_n$$

をみたす行列 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ は存在しないことを示しなさい。(ヒント: トレース)

問題 5.12. 素数 p について、$A, B \in M_p(\mathbb{F}_p)$ で、

$$AB - BA = 1_p$$

を満たすものの例を挙げなさい。(かなり難問である。$p = 3, 5$ のときにまず試してみると良いかも知れない。)

問題 5.13. 体 K と素数 q、正の整数 l が与えられているとする。このとき、群 $K^\times$ の元 x の、$K^\times$ の元としての位数 (=乗法的位数) が q^l の約数であるような元の全体は巡回群をなすことを示しなさい。

問題 5.14. 有限体 K 上の行列 $A \in M_n(K)$ が、$M_n(K)$ の中で可逆なら、ある正の整数 m について

$$A^m = 1_n \quad (\text{サイズ } n \text{ の単位行列})$$

が成り立つことを証明しなさい。