代数学演習 IB 問題 NO.4

剰余環編

問題 4.1. (各 1) R は単位元をもつ環であるとし、I をそのイデアルとする。このとき、

(1) R に同値関係 $\sim$ が、次のようにして決まることをしめしなさい。

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I.$$

(2) $R/\sim$ に、足し算を次のようにして入れる。

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad (\bar{?} \text{ は } ? \text{ の } \sim \text{ に関するクラスを表す。})$$

この足し算はうまく定義されていて、$R/\sim$ はこの足し算について可換群になることをしめしなさい。

(3) $R/\sim$ に、かけ算を次のようにして入れる。

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

このかけ算はうまく定義されていて、$R/\sim$ はこのかけ算について半群になることを示しなさい。

(4) $R/\sim$ は上で定義された足し算、かけざんに関し環をなすことを示しなさい。この環の単位元はなにですか？

定義 4.1. 上の補題の仮定のもとで、 $R/\sim$ に上のような足し算、かけ算を入れて環にしたものを R/I と書き、R の I による剰余環と呼ぶ。

問題 4.2 (この問題は全部といて一点)**.** $\mathbb{Z}$ のイデアル $I = 10\mathbb{Z}$ について、$\mathbb{Z}$ に上記補題のような同値関係をいれたとき、

(1) 1 と同値であるような $\mathbb{Z}$ の元を正、負ともに 2 個ずつあげ、それらを $a_1, \ldots, a_4$ とする。$a_1, \ldots, a_4$ が実際に 1 と同値であることを定義にもとづいて示しなさい。

(2) 3 と同値であるような $\mathbb{Z}$ の元を正、負ともに 2 個ずつあげなさい。それらを $b_1, \ldots, b_4$ とする。

(3) 上のようにして取った a_i, b_j の全ての組合せ (16 通り) について、

$$a_i + b_j$$

をもとめ、そのおのおのについて、それと同値になる $\mathbb{Z}$ の元を $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ のなかから一つ選びなさい。

問題 4.3 (この問題は全部といて一点)**.** $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ において、整数 ? のクラス (同値類) を $[?]_{10}$ で表すことにする。このとき、

(1) $[10]_{10} = [0]_{10}$ であることを証明しなさい。

(2) $[2]_{10} \neq [0]_{10}$ であることを証明しなさい。

(3) $[5]_{10} \neq [0]_{10}$ であることを証明しなさい。

(4) $[2]_{10} \times [5]_{10}$, $[3]_{10} \times [7]_{10}$ をできるだけ簡単な形になおしなさい。

問題 4.4. $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ のなかで、

$$x^2 = 1$$

を満たすものを、全て挙げなさい。

問題 4.5. $n = 3 \times 5 \times 7 \times 11 (= 1155)$ とする。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のなかで、

$$x^2 = 1$$

を満たすものを、全て挙げなさい。(それで全部であることを証明すること。)

問題 4.6.

$$1234567891234567$$

を 9 で割ったあまりはいくらだろうか？できるだけ簡潔な理由をつけて (計算機を用いることなく) 答えなさい。

問題 4.7.

$$1234567891234567$$

を 11 で割ったあまりはいくらだろうか？できるだけ簡潔な理由をつけて (計算機を用いることなく) 答えなさい。

問題 4.8.

$$1234567891234567$$

を 99 で割ったあまりはいくらだろうか？できるだけ簡潔な理由をつけて (計算機を用いることなく) 答えなさい。

問題 4.9. 次のことを正当化しなさい。「123456789 を 13 で割った余りは

$$123 - 456 + 789$$

を 13 で割った余りとおなじである。任意の 9 桁の数で同様のことができる。」

問題 4.10. 3^{100} の下 3 桁を計算機を使わずに計算せよ。

問題 4.11. $10^{10^{10}}$ を 17 で割った余りを計算せよ。
(注意) $10^{10^{10}}$ は $(10^{10})^{10}$ とは (当然のことながら) まるで異なる。