

代数学 I NO.15 要約

問題 15.1. $a = 15689, b = 8555$ とおく。環準同型

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

を $\varphi(n) = ([n]_a, [n]_b)$ で定義する。このとき、

- (1) $d = \gcd(a, b)$ (a, b の最大公約数) を求めなさい。
- (2) $\text{Ker}(\varphi)$ を求めなさい。
- (3) $\varphi(n_1) = ([0]_a, [d]_b)$ を満たす n_1 をすべて求めなさい。
- (4) $\varphi(n_2) = ([25]_a, [228]_b)$ を満たす n_2 をすべて求めなさい。(ヒント: $\varphi(25) = ([25]_a, [25]_b)$ だから $n_2 - 25$ の値を求めることをまず考えてみよ)

注意:

- 持ち込みはなんでも可である。但し通信機能を持つものや、他人の迷惑になるものを除く。
- 解答用紙右上には忘れずに学籍番号と名前を書くこと。
- 今回は計算間違いは大幅に(ただの間違いと同じ程度に)減点する。講義中に述べたように、間違いは自分で容易にチェックできるからである。
- いずれの問題でも、十分な説明(理由)が書いていない解答についてはたとえ正解であってもほとんど評価しない。

(次の問題は採点しないが、余力のある人は考えてみると良い。)

- (5) 整数 x, y が $([x]_a, [y]_b) \in \text{Image}(\varphi)$ を満たすための条件は、 $x - y \in d\mathbb{Z}$ であることを示しなさい。

(解答)

(1) 次の3つの式に注意する。

(Euclid-1) $6a - 11b = 29.$

(Euclid-2) $a = 541 \times 29.$

(Euclid-3) $b = 295 \times 29.$

(Euclid-2) と (Euclid-3) により、29 は a, b の公約数であることがわかる。 - (A)他方、 a, b の公約数 d にたいし、

$$a = a'd, \quad b = b'd \quad (\exists a' \exists b' \in \mathbb{Z})$$

と書いてみると、(Euclid-1) に代入して、

$$29 = 6a - 11b = (6a' - 11b')d$$

が得られる。すなわち d は 29 の約数であることがわかる。 - (B)(A), (B) により、29 は a, b の最大公約数であることがわかる。

(2)

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\varphi) &= \{n \in \mathbb{Z}; \varphi(n) = 0\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}; ([n]_a, [n]_b) = (0, 0)\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}; n \in a\mathbb{Z} \text{ かつ } n \in b\mathbb{Z}\} \\
&= a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \\
&= (a, b \text{ の公倍数の全体}) \\
&= (a, b \text{ の最小公倍数の倍数の全体}) \\
&= 541 \cdot 295 \cdot 29\mathbb{Z} \\
&= (4628255\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

(3)

$$\varphi(6a) = ([0]_a, [29]_b)$$

であるから、 $6a$ はそのような n_1 の一つである。その他は $\text{Ker}(\varphi)$ の分だけの差があるものばかりだから、

$$6a + \text{Ker}(\varphi) = 94134 + 4628255\mathbb{Z}$$

の元がそのような n_1 の全てである。(4) (ヒントにあるように、 $\varphi(25) = ([25]_a, [25]_b)$ だから、題意のような n_1 を求めるには、

$$\varphi(n_1 - 25) = ([0]_a, [203]_b)$$

を解けば良い。)

$$7 \cdot 6a + 25 (= 658963)$$

はそのような n_2 の一つであることがすぐにわかるから、解の全体の集合は

$$658963 + 4628255\mathbb{Z}$$

である。