

代数学 I NO.14 要約

問題 14.1.  $a = 7046, b = 1781$  とおく。環準同型

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

について、

- (1) そのようなものがあつたとして、 $\varphi(n)$  を求めなさい。
- (2) 上の条件を満たす環準同型  $\varphi$  が存在することを示しなさい。
- (3)  $d = \gcd(a, b)$  ( $a, b$  の最大公約数) を求めなさい。
- (4)  $\text{Ker}(\varphi)$  を求めなさい。
- (5)  $\varphi(n) = ([5d]_a, [6d]_b)$  を満たす  $n$  を全て求めなさい。

関連する計算

$$7046/1781 = 3.95... \approx 4$$

$$7046 - 1781 \times 4 = -78$$

$$1781/78 = 22.83... \approx 23$$

$$1781 - 78 \times 23 = -13$$

$$78 = 13 \times 6$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 7046 \\ 1781 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1781 \\ -78 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -23 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -78 \\ -13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -23 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このことから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7046 \\ 1781 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 & -91 \\ -137 & 542 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7046 \\ 1781 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。第1列から

$$(あ) \quad 23 \times 7046 + (-91) \times 1781 = -13$$

が得られる。

$$(い) \quad 7046 = 13 \times 542, \quad 1781 = 13 \times 137$$

であることから、13 は  $a, b$  の公約数であることがわかる。他方で、(あ) から、7046 と 1781 は必然的に 13 の約数であることもわかるから、13 が 7046 と 1781 の最大公約数は 13 である。