

今日のテーマ 《多項式環の扱い方と環準同型定理》

環  $R$  上の一変数多項式環  $R[X]$  とは、 $R$  の元と、一つの変数  $X$  とで生成される環であった。同様に  $R[X_1, X_2, \dots, X_n]$  を定義することができる。その出自から当然、次の補題が成り立つ

補題 7.1. 任意の環  $R$  について、

$$R[X][Y] \cong R[X, Y]$$

という自然な同型が存在する。もっと一般に

$$R[X_1, X_2, \dots, X_n] \cong R[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}][X_n]$$

がなりたつ。

命題 7.1 (代入原理). 環  $S$  とその部分環  $R$  が与えられているとする。このとき、任意の  $S$  の元の  $n$  個の組  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  にたいして、次のような環準同型  $\psi_s: R[X_1, X_2, \dots, X_n] \rightarrow S$  が唯一つ存在する。

- (1)  $\psi(r) = r \quad (\forall r \in R)$ ,
- (2)  $\psi(X_j) = s_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$ .

さらに、 $\psi$  は次のような形で与えられる。

$$\psi(p) = p(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

例 7.1. 環としての同型  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$  が存在する。 $\mathbb{R}[X]$  から  $\mathbb{C}$  への写像  $f$  を、

$$f(p) = p(\sqrt{-1})$$

で定めると、次のことが分かる。

- (1)  $f$  は写像としてうまく定義されている。
- (2)  $f$  は環の準同型である。
- (3)  $f$  の像は  $\mathbb{C}$  全体である。
- (4)  $f$  の核は  $(X^2 + 1)\mathbb{R}[X]$  である。

よって、準同型定理により、

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$$

が結論される。

※レポート問題

(期限：次の講義の終了時まで。)

環準同型  $f: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$  が与えられていて、 $f(X) = 3$  だと分かっているとする。このとき、

- (1) 多項式  $X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{Z}[X]$  の  $f$  による像を具体的に求めなさい。
- (2)  $\text{Ker}(f)$  の元で、 $0$  と異なるものを具体的に3つあげなさい。できるだけ他の人の解答とダブらぬように注意すること。