問題 15.1. $f(x) = x^{100}$ とおく。正の数 ϵ と実数 a が与えられたとするとき、

$$|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

をみたす $\delta > 0$ を一つ挙げ、実際にその δ が上記の性質を満たすことを示しなさい。(二項定理を証明なしに用いても良い。)

(解答)

$$\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{(|a|+1)^{100}})$$

と置けば良い。実際、このとき、 $x - a = h$ とおいて、

$$|h| = |x-a| < \delta$$

とすると

(あ) $$|h| < 1,$$

(い) $$(|a|+1)^{100}|h| < \epsilon.$$

がなりたつ。さらに (あ) から

(う) $$|h| \geq |h|^j \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

がなりたつ。これらに注意して $|f(x) - f(a)|$ を下のように評価すれば良い。

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(a)| \\
\underset{\text{二項定理}}{=} &|\sum_{j=1}^{100} \binom{100}{j} a^j h^{100-j}| \\
\leq &\sum_{j=1}^{100} \binom{100}{j} |a^j h^{100-j}| \\
\underset{(う)}{\leq} &|h| \sum_{j=1}^{100} \binom{100}{j} |a|^j \\
\leq &|h| \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} |a|^j \\
= &|h|(|a|+1)^{100} \\
\underset{(い)}{<} &\epsilon
\end{aligned}$$

□

(解説)

〇数学では二項定理のさい ${}_nC_r$ のような組合せの記号より $\binom{n}{r}$ を用いることが多い。その理由は

$$(1+x)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} x^j$$

のような式を扱う際に明らかになる。

〇上の解答で、

$$\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{\sum_{j=1}^{100} \binom{100}{j} |a|^j})$$

でももちろん構わない。ちょっと泥くさい感じにはなるが。

○単に $x \mapsto x^{100}$ が連続であるという事実だけならば

(1) $x \mapsto x$ は連続である。

(2) $x \mapsto f(x)$ が連続で $x \mapsto g(x)$ も連続ならば $x \mapsto f(x)g(x)$ も連続である。

という事実から説明するほうが易しい。じっさい、(2) を $f(x) = x, g(x) = x$ の場合に適用して $x \mapsto x^2$ は連続。同様に $x \mapsto x^3$ も連続 , ... という具合に論を進めれば良い。

問題 15.2. 0 でない実数 a が与えられているとする。このとき、

(1)
$$|x - a| < \delta_0 \implies x \neq 0$$
を満足するような正の実数 δ_0 の例を (a を用いて) 挙げよ。

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ とおく。$\epsilon > 0$ が与えられたとするとき、
$$|x - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$
をみたす $\delta > 0$ を一つ挙げ、実際にその δ が上記の性質を満たすことを示しなさい。

(解答)

(1)
$$\delta_0 = \frac{|a|}{2}$$
とおけば良い。じっさい、このとき $|x - a| < \delta_0$ なる任意の実数 x に対して、
$$|x| = |a + (x - a)| \geq |a| - |x - a| > |a| - \delta_0 = \frac{|a|}{2}$$
がなりたち、ゆえに $x \neq 0$ であるから。

(2)
$$\delta = \min(\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2\epsilon}{2})$$
とおけばよい。 実際、このとき、 $x - a = h$ とおいて、
$$|h| = |x - a| < \delta$$
とすると

(い)
$$|h| < \frac{|a|^2}{2}\epsilon,$$

(ろ)
$$|h| < \frac{|a|}{2}$$

がなりたつ。これらに注意して $|f(a + h) - f(a)|$ を下のように評価すれば良い。

$$\begin{aligned}
&|f(a+h) - f(a)| \\
=&\left|\frac{1}{(a+h)} - \frac{1}{a}\right| \\
=&\left|\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}\right| = \frac{|h|}{|a||a+h|} \\
\leq&\frac{|h|}{|a|(|a| - |h|)} \qquad \text{(三角不等式)} \\
\underset{(ろ)}{\leq}&\frac{2|h|}{|a|^2} \underset{(い)}{<} \epsilon
\end{aligned}$$

□

問題 15.3. 関数 f を $\mathbb{R} \ni x \to f(x) = \max(3x, 0) \in \mathbb{R}$ で定める。このとき f は $\mathbb{R}$ で一様連続であることを証明しなさい。

(解答) まず

$$f(x) = \frac{1}{2}(3x + |3x|)$$

であることに注意する。

任意の正の実数 ϵ に対して、正の実数 δ を $\delta = \epsilon/3$ で定める。このとき、 $|x - y| < \delta$ なる任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| =& \frac{1}{2}|(3x + 3|x|) - (3y + 3|y|)| = \frac{1}{2}|3(x - y) + 3(|x| - |y|)| \\
\leq& 3/2|x - y| + 3/2||x| - |y|| \\
\leq& 3/2|x - y| + 3/2|x - y| = 3|x - y| \\
<& \epsilon.
\end{aligned}$$

□