

微分積分学概論 AI 試験予想問題

(同じ問題ができるわけではありません。実際の問題はこれより少し難しいでしょう。)

問題 14.1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ とおく。正の数 ϵ と実数 a が与えられたとすると、

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

をみたす $\delta > 0$ を一つ挙げ、実際にその δ が上記の性質を満たすことを示しなさい。

(解答)

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{(3|a|^2 + 9|a| + 9)}\right)$$

と置けば良い。実際、このとき、 $x - a = h$ とおいて、

$$|h| = |x - a| < \delta$$

とすると

(あ) $|h| < 1,$

(い) $(3|a|^2 + 9|a| + 9)|h| < \epsilon.$

がなりたつ。さらに (あ) から

(う) $|h| \geq |h|^2 \geq |h|^3.$

がなりたつ。これらに注意して $|f(x) - f(a)|$ を下のように評価すれば良い。

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(a)| \\ &= |(a+h)^3 + 3(a+h)^2 - 5(a+h) + 7 - (a^3 + 3a^2 - 5a + 7)| \\ &= |3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 6ah + 3h^2 - 5h| \\ &\leq |3a^2h| + |3ah^2| + |h^3| + |6ah| + |3h^2| + |5h| \\ &\stackrel{(う)}{\leq} |3a^2||h| + |3a||h| + |h| + |6a||h| + 3|h| + 5|h| \\ &= (3|a|^2 + 9|a| + 9)|h| \stackrel{(い)}{<} \epsilon \end{aligned}$$

□

(発展) 上の f は \mathbb{R} で一様連続ではないことを示しなさい。

問題 14.2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ とおく。 $\epsilon > 0$ が与えられたとすると、

$$|x - 10| < \delta \implies |f(x) - f(10)| < \epsilon$$

をみたす $\delta > 0$ を一つ挙げ、実際にその δ が上記の性質を満たすことを示しなさい。

(解答)

$$\delta = \min(1, \epsilon)$$

とおけばよい。実際、このとき、 $x - 10 = h$ とおいて、

$$|h| = |x - 10| < \delta$$

とすると

$$(あ) \quad |h| < 1,$$

$$(い) \quad |h| < \epsilon.$$

がなりたつ。さらに (あ) から

$$(う) \quad |h| \geq |h|^2,$$

$$(え) \quad |(10 + h)| \underset{\text{三角不等式}}{\geq} 10 - |h| \underset{(あ)}{\geq} 9.$$

がなりたつ。これらに注意して $|f(10 + h) - f(10)|$ を下のよう評価すれば良い。

$$\begin{aligned} & |f(10 + h) - f(10)| \\ &= \left| \frac{1}{(10 + h)^2} - \frac{1}{10^2} \right| \\ &= \left| \frac{10^2 - (10 + h)^2}{10^2(10 + h)^2} \right| \\ &= \left| \frac{-20h - h^2}{10^2(10 + h)^2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{10^2(10 + h)^2} \right| \cdot |20h + h^2| \\ &\leq \left| \frac{1}{10^2(10 + h)^2} \right| \cdot (|20h| + |h^2|) \quad (\text{三角不等式}) \\ &\stackrel{(う)}{\leq} \left| \frac{1}{10^2(10 + h)^2} \right| \cdot (20|h| + |h|) \\ &= \left| \frac{1}{10^2(10 + h)^2} \right| \cdot (21|h|) \\ &\stackrel{(え)}{\leq} \frac{1}{10^2 \cdot 9^2} \cdot 21|h| \leq |h| \stackrel{(い)}{\leq} \epsilon \end{aligned}$$

□

問題 14.3. (その他ガチンコ勝負が一問)