逆関数・一様連続性

次のことは、簡単だが大変重要である。

定理 12.1. (1) 関数 $f : X \to Y$ が全単射ならば、f の逆写像が存在する。
(2) 逆に 関数 $f : X \to Y$ が逆写像を持つならば、f は全単射である。
(3) 関数 f の逆写像は、存在すれば一意的である。

連続関数の場合はどうであろうか。一変数では関数の単調性がキーになる。

定義 12.1 ("1.3.6")**.** 実数のある区間 I で定義された関数 f が狭義単調増加関数であるとは、

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

をみたすときにいう。

定理 12.2 ("教科書定理 1.16")**.** f が閉区間 $[a, b]$ 上の狭義単調増加な連続関数であれば、

$$f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$$

の逆関数

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

が存在する。さらに、この f^{-1} は連続で、かつ狭義単調増加である。

話は全然違うが、一様連続性についても紹介しておこう。(使うのは二学期の積分論のとき。)

定義 12.2. 実数直線の部分集合 X 上定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**一様連続**であるとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; (\forall x \in X \forall y \in X (|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon))$$

がなりたつときにいう。

○ f が X で連続であることは

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in X \exists \delta > 0; (\forall y \in X (|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon))$$

で表現されることに注意しよう。x と δ の登場順に注意。

例 12.1. (一様連続な関数とそうでない関数)

(1)

$$f_1 : \mathbb{R} \ni x \to x^2 \in \mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$ 上で連続だが一様連続ではない。

(2)

$$f_2 : \mathbb{R} \ni x \to \sin(x) \in \mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$ 上で連続で、一様連続でもある。

次の定理も区間縮小法からの帰結である。証明は教科書を参照のこと。

定理 12.3. 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f は**一様連続**である。

問題 12.1. 指数関数

$$f : \mathbb{R} \ni x \to e^x \in \mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$ 上では一様連続ではないことを示しなさい。(但し、指数法則

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

と $e^0 = 1$, $e^1 = e > 2$ は証明なしに用いても良い。また、帰納法により容易に得られる式

$$e^n > 1 + n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

も用いて良い。)