微分積分学概論 AI 要約 NO.1

本講義の目的：$\boxed{\text{極限と連続性の詳論}}$

第一回目の主題：$\boxed{\text{数学の表記法}}$

定義 1.1. 以下この講義では次のような記号を用いる。

(1) $\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合。
(2) $\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合。
(3) $\mathbb{R}$：実数全体のなす集合。
(4) $\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合。

◎集合と、その元との区別が大事。「実数の集合を一つ考える。」というのと、「実数を一つ考える。」というのをよく意識して区別すること。

1.1. 写像、全射、単射、全単射.

定義 1.2. ("1.1.4") 集合 X から Y への写像 f が与えられているとは、X の各元 x に対して、それに対応する元が ("正しく計算すれば誰でも同じ答えが得られるように") 与えられているときにいう。

f が単射であるとは、X の相異なる元 x_1, x_2 にたいしてはいつでも $f(x_1) \neq f(x_2)$ がなりたつときにいう。

f が全射であるとは、Y のどの元 y にたいしても、X のある元 x があって、$f(x) = y$ がなりたつときにいう。

1.2. 実数の集合の例、上限、上界.

定義 1.3. ("1.1.3") 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

◎ $[a, b]$ には端点があって、そこでのようすは $[a, b]$ のほかの点のようすと大きく異っている。それに対して、(a, b) の各点はどの点も似ている。

定義 1.4. ("1.1.2") $\mathbb{R}$ の部分集合 A が与えられているとする。 このとき

(1) $a \in \mathbb{R}$ が A の上界 (upper bound) であるとは、

$$\forall x \in A (x \leq a)$$

(つまり、どの $x \in A$ をもってきても $x \leq a$) が成り立つときに言う。

(2) $a \in \mathbb{R}$ が A の上限 (supremum) であるとは、A の上界のうち最小のものをいう。

◎ 集合の上界は存在するとは限らない。また、上界が存在したとしても一般にはいくつもあることに注意。

定義 1.5. ("1.1.2") 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとは、A が上界を少なくとも一つもつときに言う。

次の定理は実数の基本的な性質である。次回以降詳しく解説する。

定理 1.1. ("定理 1.1") $\mathbb{R}$ の部分集合 A で、上に有界なものは、必ず上限を唯一つもつ。

例題 1.1.

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x^3 - 25x < 0\}$$

は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの理由を説明せよ。

問題 1.1.

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x^4 - 30x^3 - 100 < 0\}$$

は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの理由を説明せよ。