

$\forall$ と $\exists$ (その3)
-----------------------------

前回の解答例は以下のようなになる。

主張者	数式による翻訳	真偽	理由
A(例)	$\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 3)$	偽	1 も実数だが 3 以上ではない。
B	$\exists x \in \mathbb{R}(x \geq 5)$	真	$x = 10$ がその例である。
C(例)	$\forall x \exists y \in \mathbb{R}(y \geq x + 5)$	真	あなたの $x$ に対して生徒 C は $y = x + 6$ を用意すれば良い。
D(例)	$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(x \geq y + 5)$	偽	そのような $x$ があつたとすると、あなたが $y$ として $x$ をとると矛盾が生じる。
E	$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x + y = 3)$	真	あなたの $x$ に対して生徒 E は $y = (3 - x)$ とすれば良い。
F	$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(x + y = 3)$	偽	そのような $x$ があつたとするとあなたが $y = -x$ にとると矛盾が生じる。
G	$\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R}(xz = y)$	真	G が $x = 0, y = 0$ と決めれば、どのような $z \in \mathbb{R}$ に対しても $xz = 0z = 0 = y$ である。
H	$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{Z}(z = \frac{x+y}{2})$	真	先手の $x$ に対して後手が $y = x$ に選んだとしよう。このとき先手は $z = x$ を選べば良い。
I	$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{Z}(z \neq \frac{x+y}{2})$	真	先手の $x$ に対して後手が $y = -x + 1$ に選べば $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$ は整数にならず先手が $z$ としてどんな整数を選んでも負けである。

一般的に、「 $\forall$  のついた変数については先生(あなた)が言い、 $\exists$  のついた変数については生徒(わたし)が言う」というように役割分担をして、ゲーム仕立てにすると分かりやすいようである。

問題 7.1. (気の利いた)  $\exists, \forall$  に関するレベル 2 かレベル 3 相当の問題を作成し、問題と解答例を書きなさい。