

∇ と ∃ (その3)

今回は小テストである。裏面の問題を解いて、解答用紙に解答すること。
なお、

- (1) 本やノート等を参照しても良い。ただし、私語は厳禁とする。
- (2) 時間は1時限終了時までである。
- (3) 解答は簡潔なものであることに越したことはないが、説明が欄にどうしても収まり切れない場合には適宜 * 印などをつけて裏面等に付け足しても良い。
- (4) 以下の解説も参考にすると良いかも知れない。

$$\exists x \forall y P(x, y)$$

を証明するには全ての y について一斉に $P(x, y)$ がなりたつような x の例を挙げれば良い。すなわち、あなたが自分で x の例 x_0 を挙げ、その x_0 に関して(一般には何らかの巧妙な「多くのモノをさばく」テクニックを用いて)全ての y について一斉に $P(x_0, y)$ がなりたつことを示すことになる。

例: $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (y^2 \geq x)$ は正しい。なぜなら、 $x = 0$ という例に対して

$$\forall y \in \mathbb{R} (y^2 \geq 0)$$

がなりたつからである。

$$\forall y \exists x P(x, y)$$

を証明するには、各々の y に対してそれぞれ x の例を挙げればよい。

例:

$$\forall y \exists x (x > y)$$

は正しい。なぜなら、各々の実数 y に対して、 x の例として $x + 1$ をとればよいからである。

問題 5.1 の答:(1),(2) とともに偽である。なぜなら、命題 5.1 を用いて (1),(2) はそれぞれ

$$(1') \exists y \in \mathbb{Q}_{>0} (y^2 = 3)$$

$$(2') \forall x \in \mathbb{Q}_{>0} \exists y \in \mathbb{Q}_{>0} (y^2 = x)$$

と同値である。平方して 3 になる数は $\pm\sqrt{3}$ に限られ、それらは有理数ではないから、(1') は偽である。また、

$$\exists y \in \mathbb{Q}_{>0} (y^2 = x)$$

という x についての命題を $P(x)$ と書くと、(1') は $P(3)$ と同じことであり、(2') は

$$\forall x \in \mathbb{Q}_{>0} (P(x))$$

という命題にほかならない。反例 $x = 3$ があるので (2') も偽である。

生徒 A-I が以下のような主張をしている。これらの主張を数式に翻訳し、その真偽を理由を挙げて述べなさい。ただし、A,C,D は例題としてはじめから解答が書いてある。

レベル1

(例題) 生徒 A は、「実数 x はそれがどんなものであっても 3 以上である」と言った。

生徒 B は「5 以上の実数 x が存在する」と言った。

レベル2

(例題) 生徒 C は「あなたがどんな実数 x を一つ持ってきても、わたしはそれより 5 以上大きい実数 y を挙げることができる」と言った。

(例題) 生徒 D は「わたしの知っているある実数 x はどんな実数 y より 5 以上大きい」と言った。

生徒 E は「あなたがどんな実数 x を一つ持ってきても、わたしは実数 y を一つ用意して、二つの数の和を 3 にできる。」と行った。

生徒 F は「わたしは実数 x を一つ用意して、あなたがどんな実数 y を一つ持ってきても、二つの数の和が 3 であるようにできる。」と行った。

生徒 G は「わたしは x と y という二つの実数を用意して、あなたがどんな実数 z を一つ持ってきても、 $xz = y$ であるようにできる」と言った。

レベル3 (前問までは実数を扱っていたが以下の問題では 整数 を扱うことに注意)

次のようなゲームを考えよう。

ゲームは先手、後手の二人で次のような手順で行なわれる。

(手順1) 先手が整数 x を一つ言う。

(手順2) 後手が整数 y を一つ言う。

(手順3) 先手が整数 z を一つ言う。

このとき、

- z が x と y の平均値 $(\frac{x+y}{2})$ ならば先手の勝ち。
- それ以外ならば後手の勝ち。

生徒 H は、「このゲームで、先手が 1 手目にどんな整数 x を言っても、後手がへまをすれば、先手が勝つことがあり得ます。」と行った。

生徒 I は、「このゲームは後手がうまくやれば必ず後手の勝ちですね。」と行った。

宿題

上の諸問題は若干気が利いていない気もする。そこで、各自が気の利いた \exists, \forall に関するレベル2かレベル3相当の問題を作成し、解答例を作ってみること。これは次回の小演習の課題とする予定であるが、いきなりその場では時間が少なくて作れないかも知れないので、宿題として次回までに案を練っておくことをお勧めする。

当然各人全く違った問題を作成することを期待している。

主張者	数式による翻訳	真偽	理由
A(例)	$\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 3)$	偽	1 も実数だが 3 以上ではない。
B			
C(例)	$\forall x \exists y \in \mathbb{R}(y \geq x + 5)$	真	あなたの x に対して生徒 C は $y = x + 6$ を用意すれば良い。
D(例)	$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(x \geq y + 5)$	偽	そのような x があったとすると、あなたが y として x をとると矛盾が生じる。
E			
F			
G			
H			
I			

主張者	数式による翻訳	真偽	理由
A(例)	$\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 3)$	偽	1 も実数だが 3 以上ではない。
B	$\exists x \in \mathbb{R}(x \geq 5)$	真	$x = 10$ がその例である。
C(例)	$\forall x \exists y \in \mathbb{R}(y \geq x + 5)$	真	あなたの x に対して生徒 C は $y = x + 6$ を用意すれば良い。
D(例)	$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(x \geq y + 5)$	偽	そのような x があったとすると、あなたが y として x をとると矛盾が生じる。
E	$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x + y = 3)$	真	あなたの x に対して生徒 E は $y = (3 - x)$ とすれば良い。
F	$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(x + y = 3)$	偽	そのような x があったとするとあなたが $y = -x$ にとると矛盾が生じる。
G	$\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R}(xz = y)$	真	G が $x = 0, y = 0$ と決めれば、どのような $z \in \mathbb{R}$ に対しても $xz = 0z = 0 = y$ である。
H	$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{Z}(z = \frac{x+y}{2})$	真	先手の x に対して後手が $y = x$ に選んだとしよう。このとき先手は $z = x$ を選べば良い。
I	$\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{Z}(z \neq \frac{x+y}{2})$	真	先手の x に対して後手が $y = -x + 1$ に選べば $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$ は整数にならず先手が z としてどんな整数を選んでも負けである。