

日本語技法 NO.4

\forall と \exists

命題には変数を含むものがある。たとえば

$$P(n) = (n^2 + 3n - 9 > 0)$$

とか

$$P(n) = (n^2 + n + 41 \text{ は素数である})$$

とかである。これらの命題は n を与えるごとに真か偽かが決定される。

定義 4.1. 変数 x を含むような命題 P にたいして、

- (1) $\forall x(P(x))$ は「どのような x にたいしても、 $P(x)$ が成り立つ」という意味である。
- (2) $\exists x(P(x))$ は「少なくとも一つの x にたいして、 $P(x)$ が成り立つ」という意味である。

原理的には、 \forall, \exists および前回の論理記号と、集合論の幾つかの記号を組み合わせることにより、数学のすべての言葉を記号列に翻訳できる。

例えばつぎの文は、「数学的帰納法」を表現したものである。

$$\forall S(0 \in S \text{ and } (\forall n \in \mathbb{N}(n \in S \implies (n+1) \in S)) \implies \mathbb{N} \subset S)$$

数学における論理は、これらの記号列に関する「単純な計算」である。さしあたって今回は、つぎのことに注意しよう。

登場人物 (x や y などの変数) の出てくる順番が大事である。

例えば、 $J = \{\text{グー、チョキ、パー}\}$ にたいして、 $x \succ y$ を、「 x は y より強い」というふうに定義すると。

$$\forall x \in J(\exists y \in J(y \succ x))$$

は真の命題だが、

$$\exists y \in J(\forall x \in J(y \succ x))$$

は偽の命題である。

問題 4.1.

$$P : \forall x \in \mathbb{Z}(\exists y \in \mathbb{Z}(x > y^2))$$

$$Q : \exists y \in \mathbb{Z}(\forall x \in \mathbb{Z}(x > y^2))$$

とおくとき、 P, Q は真だろうか、それとも偽だろうか。それぞれ理由を述べて答えなさい。