

日本語技法 NO.1

本講義の進め方 :

- 1-7 回 : (土基善文)
 - 数学における基本的な日本語の技術を身につける。
 - 毎回小演習を行なう。(出席点も兼ねる。)
- 8-15 回: 情報コースの教員の先生方によるいろいろな話。

1-7 回までの基本課題 :

主に数学のかかわる場面において、(講義やレポート、試験 etc.)

- 言いたいことをうまく伝えること。
- 相手のいうことを理解できること。
- 論理的な話の展開が素早くできるようになること。

言葉の意味を決めておく : 定義

議論を進める上で、まず大事なことは、ひとつひとつの言葉を皆が同じ意味に理解することである。(これは簡単なことではない。たとえば憲法 9 条の例を考えよ。)

言葉の意味を曖昧なく定めることを「定義する」という。たとえば、つぎの定義は、記号の使い方についての取り決めである。

定義 1.1.

\mathbb{Z} = (整数の全体のなす集合),

\mathbb{Q} = (有理数の全体のなす集合),

\mathbb{R} = (実数の全体のなす集合),

\mathbb{C} = (複素数の全体のなす集合),

\mathbb{N} = (0 以上の整数のなす集合).

余談ながら、 \mathbb{N} 以外は、良く出て来る記号なので覚えておいたほうが良い。 \mathbb{N} について、「自然数」に 0 を入れる流儀と入れない流儀がある。高校では混乱を避けるために一律「入れない」ことになっているが、どちらが「正しい」というわけでもない。議論のあいだじゅう一律に決めておけばそれでよい。

現代数学の建前では、

- 0 の定義.
- 1 の定義.
- a, b がわかっているときに、組 (a, b) の定義.
- 集合の定義.

等から始まって、自然数、実数、複素数と定義していくことになっている。しかし、それを全部この講義でやると時間がなくなること必定なので、整数、有理数、実数、複素数、集合、写像などについては、ある程度(つまり、高校卒業した程度)の知識があるとして以下議論を進める。ただし、「躓き易い部分」については適宜解説する。

1.1. 写像.

定義 1.2. 集合 S と集合 T が与えられているとする。 S の各元 s にたいして、ある T の元 ($f(s)$ と書かれる) がはっきりと(ただ一通りに) 定まっているとき、 S から T への f という写像が定義されていると言う。さらに、このとき、 S を f の定義域(または始集合)といい、 T を f の終集合と言う。

注意。

- (1) ようするに、 s が与えられているとき、 $f(s)$ は誰が答えをだしても必ず(計算間違い等はもちろん除いて) 同じになる。ということが大事なのである。
- (2) 大学レベルの数学では、始集合と終集合をまず指定してやるのが大事である。同じ式で書かれるような写像でも、始集合や終集合が異なれば全く違う写像と考えるべきである。

例 1.1. つぎのおのおの、「写像のようなもの」について考えよう。

- (1) (平面三角形全体) $\ni \Delta \mapsto (a, b, c) (= \Delta \text{ の三辺}) \in \mathbb{R}^3$
- (2) (平面三角形全体) $\ni \Delta \mapsto (a+b+c) \in \mathbb{R}$ (a, b, c は Δ の三辺)
- (3) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$
- (4) $\mathbb{R}_{>0} \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$

これらのうち、(2) は写像である(うまく定義されている)。(1),(3) は写像ではない(うまく定義されていない)。ただし、(4) については平方根を「非負のものをとる」と約束しておけばうまく定義されている。このように、そのままではうまく定義されていないものでも、言葉を補うことによってうまく定義できているように修正できる場合がある。

問題 1.1. つぎのような写像 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ (分数に対してその分母を与える写像) を作りたい。

$$(*) \quad f(1/3) = 3, f(2/5) = 5, f(355/113) = 113, \dots$$

このとき、

- (1) f を

$$f(m/n) = n \quad (m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$$

と定義しようとしても、これはうまく定義されていないことを示しなさい。

- (2) (1) を修正して、(*) を満たす写像 f の例を作りなさい。