代数学演習 I 問題 NO.7

環の準同型定理編

問題 7.1. (準同型定理) $f : R \to S$ を環の間の準同型とするとき、次のことを示しなさい。

(1) (f の核 $I = \mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(0)$ は R のイデアルである。–これは既出なので証明は省略して良い)
(2) $f(r) = f(r') \quad \Leftrightarrow \quad r - r' \in I$。
(3) 写像 $\bar{f}$ を

$$\bar{f} : R/I \ni \bar{r} \mapsto f(r) \in S$$

で定義すると、これは代表元の取りかたによらずにうまく定義されている。
(4) $\bar{f}$ は単射準同型写像である。
(5) f が全射ならば、$\bar{f}$ は同型写像である。

例題 7.1. (準同型定理の使い方)

(1) $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ のイデアルであることを示しなさい。
(2) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ を求めよ。

(1),(2) を一遍に解決する。以下、整数 m にたいし、m の $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ での同値類を $[m]_{12}$ と書き、m の $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ での同値類を $[m]_4$ と書くことにする。写像 $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を

$$f : [m]_{12} \to [m]_4$$

で定義すれば、これが代表元によらずにうまく定義されており、準同型写像であることはすぐに分かる。f の核は

$$\{\bar{m}; \quad m \text{ は } 4 \text{ の倍数}\} = 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

で、準同型写像の核はイデアルだから、$4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ のイデアルである。$(\to (1))$

f は全射だから、準同型定理(前問)により、$\bar{f} : (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は同型を与える。$(\to (2)$ (答え：$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$))

問題 7.2. 次の環 R とそのイデアル I について、R/I を求めよ。

(1) $R = \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}, I = 8R.$
(2) $R = \mathbb{C}[X]/((X+1)(X-1)\mathbb{C}[X]), I = (X+1)R.$

問題 7.3. 同型 $\mathbb{C}[X]/(X-3)\mathbb{C}[X] \cong \mathbb{C}$ を示しなさい。

問題 7.4. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(1+\sqrt{-1}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示しなさい。

問題 7.5. $f : \mathbb{R} \to S$ を 環の準同型とします。 S のイデアル J をとって、

$$I = f^{-1}(J)$$

とおくと、I は R のイデアルであって、単射準同型 $\bar{f} : R/I \to S/J$ が f により自然に定義されることを示しなさい。

問題 7.6. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ のイデアル $I = (2, \sqrt{10})$ による剰余環 R/I は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを示し、I が R の素イデアルであることを言いなさい。