代数学 I NO.15 試験問題

注意:

- 持ち込みはなんでも可である。但し通信機能を持つものや、他人の迷惑になるものを除く。
- 解答用紙右上には忘れずに学籍番号と名前を書くこと。
- いずれの問題でも、十分な説明 (理由) が書いていない解答についてはたとえ正解であってもほとんど評価しない。

問題 15.1. 環準同型

$$\varphi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

で、 $\varphi(X) = (1, 2, 3)$ を満たすものについて考えたい。 そのようなものがあったとして、

(1) $\varphi(\frac{1}{6})$ はいくらになるべきだろうか。
(2) $\varphi(X^4)$ はいくらになるべきだろうか。
(3) $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ にたいして、 $\varphi(p)$ を求めなさい。

問題 15.2. $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ への環準同型は存在するだろうか。

問題 15.3. 環準同型

$$\psi : \mathbb{Z} \ni n \mapsto ([n]_3, [n]_5, [n]_7) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

を考える。 (ただし、$[n]_m$ は 整数 n の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ におけるクラスをあらわす。)

(1) $\mathrm{Ker}(\psi)$ を求めよ。
(2) 環の準同型定理により ψ から導かれる単射準同形写像はどんなものか？(この小問に限り説明不要。)
(3) 3 と $5 \cdot 7$ とでユークリッドの互除法を行ない、$\psi(x) = ([1]_3, [0]_5, [0]_7)$ をみたす $x \in \mathbb{Z}$ を一つ求めなさい。
(4) $\psi(x) = ([1]_3, [2]_5, [3]_7)$ をみたす $x \in \mathbb{Z}$ を一つ求めなさい。
(5) 3 で割ると 1 あまり、 5 で割ると 2 あまり、 7 で割ると 3 余るような正の整数の例を 3 つ挙げなさい。

問題 15.1. 環準同型

$$\varphi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

で、 $\varphi(X) = (1, 2, 3)$ を満たすものについて考えたい。 そのようなものがあったとして、

(1) $\varphi(\frac{1}{6})$ はいくらになるべきだろうか。
(2) $\varphi(X^4)$ はいくらになるべきだろうか。
(3) $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ にたいして、 $\varphi(p)$ を求めなさい。

解答:
(1):

$$\begin{aligned}6\varphi(\frac{1}{6}) &= \varphi(\frac{1}{6}) + \varphi(\frac{1}{6}) + \varphi(\frac{1}{6}) + \varphi(\frac{1}{6}) + \varphi(\frac{1}{6}) + \varphi(\frac{1}{6}) \\ &= \varphi(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}) = \varphi(1) = (1, 1, 1)\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\varphi(\frac{1}{6}) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$$

(2):

$$\varphi(X^4) = \varphi(X)^4 = (1^4, 2^4, 3^4) = (1, 16, 81).$$

(3) (1) と同様にして、

$$\varphi(a) = (a, a, a) \qquad (\forall a \in \mathbb{Q})$$

がわかる。

$$p(X) = \sum_j p_j X^j \qquad (p_j \in \mathbb{Q})$$

と書くと

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \varphi(\sum_j p_j X^j) \\ &= \sum_j \varphi(p_j)\varphi(X)^j \\ &= \sum_j (p_j, p_j, p_j) \cdot (1, 2, 3)^j \\ &= (\sum_j p_j 1^j, \sum_j p_j 2^j, \sum_j p_j 3^j) \\ &= (p(1), p(2), p(3))\end{aligned}$$

つまり

$$\varphi(p) = (p(1), p(2), p(3)).$$

問題 15.2. $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ への環準同型は存在するだろうか。

解答:存在しない。
理由: もしそのようなもの ϕ があったとすると、

$$[1]_7 = \phi(1) = \phi(\frac{1}{7})\phi(7) = \phi(\frac{1}{7})[7]_7 = \phi(\frac{1}{7})[0]_7 = [0]_7$$

となって矛盾するから。

問題 15.3. 環準同型

$$\psi : \mathbb{Z} \ni n \mapsto ([n]_3, [n]_5, [n]_7) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

を考える。(ただし、$[n]_m$ は 整数 n の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ におけるクラスをあらわす。)

(1) $\mathrm{Ker}(\psi)$ を求めよ。
(2) 環の準同型定理により ψ から導かれる単射準同形写像はどんなものか?(この小問に限り説明不要。)
(3) 3 と $5{\cdot}7$ とでユークリッドの互除法を行ない、$\psi(x) = ([1]_3, [0]_5, [0]_7)$ をみたす $x \in \mathbb{Z}$ を一つ求めなさい。
(4) $\psi(x) = ([1]_3, [2]_5, [3]_7)$ をみたす $x \in \mathbb{Z}$ を一つ求めなさい。
(5) 3 で割ると 1 あまり、 5 で割ると 2 あまり、 7 で割ると 3 余るような正の整数の例を 3 つ挙げなさい。

(解答):
(1):

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\psi) &= \psi^{-1}([0]_3, [0]_5, [0]_7) \\ &= \{n \in \mathbb{Z}; [n]_3 = [0]_3 \text{ かつ } [n]_5 = [0]_5 \text{ かつ } [n]_7 = [0]_7\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}; n \in 3\mathbb{Z} \text{ かつ } n \in 5\mathbb{Z} \text{ かつ } n \in 7\mathbb{Z}\} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 7\mathbb{Z} = 105\mathbb{Z}\end{aligned}$$

(2):

$$\overline{\psi} : \mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z},$$

$$\psi([n]_{105}) = ([n]_3, [n]_5, [n]_7)$$

(3):

$$12 \times 3 + (-1) \times 35 = 1$$

を利用する。

$$\psi(-35) = ([1]_3, [0]_5, [0]_7)$$

より $x = -35$ は求めるものの一つである。
(4): 5 と $3 \cdot 7 = 21$ とで互除法を行ない、

$$(-4) * 5 + 1 * 21 = 1$$

を得る。上と同様にして

$$\begin{aligned}\psi(-35) &= ([1]_3, [0]_5, [0]_7) \\ \psi(21) &= ([0]_3, [1]_5, [0]_7) \\ \psi(15) &= ([0]_3, [0]_5, [1]_7)\end{aligned}$$

をえる。(最後の式は $\psi(1) = ([1]_3, [1]_5, [1]_7)$ と上二式から得られる。)

$$
\begin{aligned}
&([1]_3, [2]_5, [3]_7) \\
=&1([1]_3, [0]_5, [0]_7) + 2([0]_3, [1]_5, [0]_7) + 3([0]_3, [0]_5, [1]_7) \\
=&\psi(-35) + 2\psi(21) + 3\psi(15) \\
=&\psi(-35 + 42 + 45) = \psi(52)
\end{aligned}
$$

ゆえに $x = 52$ **は一つの例である。**

(5):

$$52, 52 + 105 (= 157), 52 + 105 * 100 (= 10552)$$

など。