$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ **《環の準同型定理の利用法》**

例 7.1 (**準同型定理の基本例**1). $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ への写像 f を、

$$f([n]_{100}) = [n]_{10} \qquad ([?]_n \text{ は } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ における } ? \text{ の同値類 })$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は写像としてうまく定義されている。すなわち、f の定義は代表元のとり方によらない。
(2) f は環の準同型である。
(3) f の像は $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ 全体である。
(4) f の核は $10\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ である。

よって、準同型定理により、

$$(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})/(10\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

が結論される。

例 7.2. 環としての同型 $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$ が存在する。$\mathbb{R}[X]$ から $\mathbb{C}$ への写像 f を、

$$f(p) = p(\sqrt{-1})$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は写像としてうまく定義されている。
(2) f は環の準同型である。
(3) f の像は $\mathbb{C}$ 全体である。
(4) f の核は $(X^2+1)\mathbb{R}[X]$ である。

よって、準同型定理により、

$$\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$$

が結論される。

例 7.3 (**準同型定理の応用例１**). $\mathbb{Z}[X]$ から $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ への写像 f を、

$$f(p) = p(\sqrt{14})$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は写像としてうまく定義されている。すなわち、f の像は $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ からはみ出さない。
(2) f は環の準同型である。
(3) f の像は $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ 全体である。
(4) f の核は $(X^2-14)\mathbb{Z}[X]$ である。

よって、準同型定理により、

$$\mathbb{Z}[X]/(X^2-14)\mathbb{Z}[X] \cong \mathbb{Z}[\sqrt{14}]$$

が結論される。

例 7.4 (**準同型定理の応用例２**). $A \in M_2(\mathbb{C})$ を、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

で定め、$\mathbb{C}[X]$ から $M_2(\mathbb{C})$ への写像 f を、

$$f(p) = p(A)$$

で定めると、次のことが分かる。

(1) f は環の準同型である。

(2) f の像は

$$\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}A + \mathbb{C}E = \{kA + lE; k, l \in \mathbb{C}\} = \left\{ \begin{pmatrix} k+l & 3k \\ 5k & 7k+l \end{pmatrix}; k, l \in \mathbb{C} \right\}$$

である。

(3) f の核は $(X^2 - 8X - 8)\mathbb{C}[X]$ である。

よって、準同型定理により、

$$\mathbb{C}[X]/(X^2 - 8X - 8)\mathbb{C}[X] \cong \mathbb{C}[A] (= \mathbb{C}A + \mathbb{C}E)$$

が結論される。

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限：次の講義の終了時まで。)

(I) (a)

$$\phi : \mathbb{R}[X]/(X^2 + 2X + 1)\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$$

を $\phi(p(X)) = p(-1)$ で定義すると、これはうまく定義されていることを示しなさい。

(b)

$$\psi : \mathbb{R}[X]/(X^2 + 2X + 1)\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$$

を $\phi(p(X)) = p(1)$ で定義しようとすると、これはうまく定義されていないことを示しなさい。

(II)

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 2X + 2)\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$$

を示しなさい。