

今日のテーマ 《準同型と準同型定理》

定義 6.1. R, S はともに環であるとし、 $f: R \rightarrow S$ をその間の写像とする。このとき、 f が R から S への環準同型写像であるとは、次の条件が成り立つときにいう。

- (1) f は $(R, +)$ から $(S, +)$ への群としての準同型である。すなわち、

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

が、すべての R の元 a, b について成り立つ。

- (2) f は R の積を S の積にうつす。すなわち、

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

が、すべての R の元 a, b について成り立つ。

- (3) f は $(R$ の) 単位元を $(S$ の) 単位元にうつす。すなわち、

$$f(1_R) = 1_S$$

が成り立つ。

群 (加法群) についての準同型の知識を使うと、次のことは直ちにわかる。

補題 6.1. 環準同型 $f: R \rightarrow S$ について、

- (1) $f(0_R) = f(0_S)$ が成り立つ。
(2) $f(-a) = -f(a)$ が全ての $a \in R$ に対して成り立つ。

つぎに、準同型定理の説明にはいる。

定義 6.2. 環準同型 $f: R \rightarrow S$ について、 $f^{-1}(0) (= \{r \in R; f(r) = 0\})$ のことを、 f の核 (Kernel) と呼び、 $\text{Ker}(f)$ で書き表す。

f の像 (Image) とは、通常通り、

$$\text{Image}(f) = \{f(r); r \in R\}$$

のことである。

補題 6.2. 任意の環準同型 $f: R \rightarrow S$ にたいして、

- (1) $\text{Ker}(f)$ は R のイデアルである。
(2) $\text{Image}(f)$ は S の部分環である。

定理 6.1. 環準同型 $f: R \rightarrow S$ について、 R の同値関係 \sim_f を

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

で定義し、また $r \in R$ の $R/\text{Ker}(f)$ でのクラスを \bar{r} とすると、次のことが成り立つ。

- (1) $x, y \in R$ にたいして、

$$x \sim_f y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

が成り立つ

- (2) f は

$$R/\text{Ker}(f) \ni \bar{r} \mapsto f(r) \in \text{Image}(f) \quad (r \in R)$$

なる全単射準同型を誘導する。

定義 6.3. 環のあいだの全単射準同型のことを、同型とよぶ。容易にわかるように、環のあいだの同型 $f: R \rightarrow S$ が与えられたとき、 f の逆写像 f^{-1} は S から R への同型になる。

レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限: 次の講義の終了時まで。)

- (I) 環の準同型 $f: \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \ni [a]_{15} \mapsto [a]_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($[?]_n$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ におけるクラス) を考える。(本当は、 f がうまく定義されていること、さらに f が実際に環の準同型であることを諸君が証明すべきだが、ここではそれは要求しない。) このとき、
- (a) $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の元 x 15 個のそれぞれについて、 $f(x)$ を書きなさい。
 - (b) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の元 y 5 個のそれぞれについて、 $f^{-1}(y)$ を書きなさい。
- (II) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \ni [n]_{11} \mapsto [n]_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ はうまく定義されて、環準同型になるだろうか。
- (III) 正の整数 k, l が与えられたとき、 k, l にどのような関係があれば、 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \ni [n]_k \mapsto [n]_l \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ はうまく定義されて、環準同型になるのか、答えなさい。