代数学 I 要約 NO.1

この講義の前半では、次の定理の証明を目標とする。

定理 1.1 (環の準同型定理). 環 R から別の環 S への準同型写像 $\phi : R \to S$ が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

(1) ϕ の像 $\mathrm{Image}\,\phi$ は S の部分環である。
(2) ϕ の核 $I = \mathrm{Ker}\,\phi$ は R のイデアルである。
(3) 剰余環 R/I は $\mathrm{Image}\,\phi$ と同型である。

後半では、環や体の実例、とくに「一次元の環」について詳しく扱う。

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《環の定義・部分環の定義》

環とは、足し算、引き算と掛け算ができる集合のことである。
部分環とは、部分集合であって環になっているもののことである。

定義 1.1 (環の定義). 集合 R が環であるとは、足し算と呼ばれる写像

$$+ : R \times R \to R$$

と掛け算と呼ばれる写像

$$\times : R \times R \to R$$

が定義されていて次の性質を満たす時に言います。

(1) R は足し算に関して可換群をなす。(R の足し算に関する単位元を R の零元といい、0 (時には 0_R) と書く。)
(2) R の積は結合法則を満たす。
(3) R の足し算と掛け算は分配法則を満たす。すなわち、任意の $a, b, c \in R$ に対して、次のことが成り立つ。

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c, \quad c \times (a+b) = c \times a + c \times b$$

(4) R は積に関して単位元を持つ。すなわち、ある $u \in R$ が存在して、すべての $x \in R$ に対して、$xu = x$ かつ $ux = x$ が成り立つ。

例 1.1. 次のものは通常の足し算、掛け算によって環になる。

(1) (重要) 整数全体のなす集合 $\mathbb{Z}$.
(2) 有理数全体のなす集合 $\mathbb{Q}$.
(3) 実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$.
(4) 複素数全体のなす集合 $\mathbb{C}$.
(5) 実数を成分として持つ 2 次の正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$.
(6) (重要) 実数上の一変数多項式全体のなす集合 $\mathbb{R}[X]$.

補題 1.1. 環 R の単位元は、ただ一つである。

今後、環 R の単位元を 1 (時には 1_R) と書く。

定義 1.2 (**部分環の定義**). R **が単位元をもつ環であるとする。**R **の部分集合** S **が** R **の部分環であるとは、**S **が次の条件を満たす時にいう。**

(1) S **は** R **の足し算、かけ算を流用することにより環になっている。**
(2) S **は** R **の単位元を元として含む。**

例 1.2. **次のものは複素数全体のなす環** $\mathbb{C}$ **の部分環である。**

(1) **整数全体の集合** $\mathbb{Z}$.
(2) **有理数全体の集合** $\mathbb{Q}$.
(3) **実数全体の集合** $\mathbb{R}$.
(4) $\mathbb{Z}+\sqrt{-1}\mathbb{Z}=\{x+\sqrt{-1}y; x, y \in \mathbb{Z}\}$.

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(**期限：次の講義の終了時まで。**)

問題 1.1. $\mathbb{C}$ **の部分環** R **が** $\sqrt{-2}$ **を含んだとします。このとき、**R **は** $\mathbb{Z}+\sqrt{-2}\mathbb{Z}$ **を部分集合として含むことを示しなさい。**

問題 1.2. $\mathbb{Z}+\sqrt{-2}\mathbb{Z}$ **は** $\mathbb{C}$ **の部分環であることを示しなさい。**