問題 15.1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ とおく。正の数 ϵ と実数 a が与えられたとするとき、

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

をみたす $\delta > 0$ を一つ挙げ、実際にその δ が上記の性質を満たすことを示しなさい。

(解答)

$$\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{(3|a|^2 + 9|a| + 9)})$$

と置けば良い。実際、このとき、 $x - a = h$ とおいて、

$$|h| = |x - a| < \delta$$

とすると

(あ) $$|h| < 1,$$
(い) $$(3|a|^2 + 9|a| + 9)|h| < \epsilon.$$

がなりたつ。さらに (あ) から

(う) $$|h| \le |h|^2 \le |h|^3.$$

がなりたつ。これらに注意して $|f(x) - f(a)|$ を下のように評価すれば良い。

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(a)| \\
=&|(a + h)^3 + 3(a + h)^2 - 5(a + h) + 7 - (a^3 + 3a - 5a + 7)| \\
=&|3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 6ah + 3h^2 - 5h| \\
\le&|3a^2h| + |3ah^2| + |h^3| + |6ah| + |3h^2| + |5h| \\
\underset{(う)}{\le}&|3a^2||h| + |3a||h| + |h| + |6a||h| + 3|h| + 5|h| \\
=&(3|a|^2 + 9|a| + 9)|h| \underset{(い)}{<} \epsilon
\end{aligned}$$

□

$$|x-10|<\delta \implies |f(x)-f(10)|<\epsilon$$

をみたす $\delta>0$ **を一つ挙げ、実際にその** δ **が上記の性質を満たすことを示しなさい。**

(**解答**)

$$\delta=\min(1,\epsilon)$$

とおけばよい。 実際、このとき、 $x-10=h$ **とおいて、**

$$|h|=|x-10|<\delta$$

とすると

(**あ**) $$|h|<1,$$

(**い**) $$|h|<\epsilon.$$

がなりたつ。さらに (**あ**) **から**

(**う**) $$|h|\le |h|^2,$$

(**え**) $$|(10+h)| \underset{\text{三角不等式}}{\ge} 10-|h| \underset{(\text{あ})}{\ge} 9.$$

がなりたつ。これらに注意して $|f(10+h)-f(10)|$ **を下のように評価すれば良い。**

$$\begin{aligned}
&|f(10+h)-f(10)| \\
&=\left|\frac{1}{(10+h)^2}-\frac{1}{10^2}\right| \\
&=\left|\frac{10^2-(10+h)^2}{10^2(10+h)^2}\right| \\
&=\left|\frac{-20h-h^2}{10^2(10+h)^2}\right| \\
&=\left|\frac{1}{10^2(10+h)^2}\right|\cdot|20h+h^2| \\
&\le\left|\frac{1}{10^2(10+h)^2}\right|\cdot(|20h|+|h^2|) \qquad (\text{三角不等式}) \\
&\underset{(\text{う})}{\le}\left|\frac{1}{10^2(10+h)^2}\right|\cdot(20|h|+|h|) \\
&=\left|\frac{1}{10^2(10+h)^2}\right|\cdot(21|h|) \\
&\underset{(\text{え})}{\le}\frac{1}{10^2\cdot 9^2}\cdot 21|h| \le |h| \underset{(\text{い})}{<} \epsilon
\end{aligned}$$

$\square$

$$f_c(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & (\ x \neq 0 \text{ のとき}) \\ c & (\ x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する。この時、

(1) $c = 0$ のとき、 $f_c(= f_0)$ は $x = 0$ で連続でないことを証明しなさい。

(2) $c \neq 0$ のとき、 f_c は $x = 0$ で連続でないことを証明しなさい。

ただし、三角関数 $\sin(x)$ については、次の 3 つのことは証明なしで用いても良い。(それ以外の性質は適宜証明するか、論拠を提示して用いること。)

(S1) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$
(S2) $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$
(S3) $\sin(0) = 0.$

(解答)
(1) (S1), (S2) により、

$$\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

が容易にわかる。よって、

$$f_0(\frac{2}{(4n+1)\pi}) = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

もし仮に f_0 が $x = 0$ で連続であったとすると、(連続性の定義の ϵ として $\frac{1}{2}$ を採用して、)

(あ) $$\exists \delta > 0; \left(|x - 0| < \delta \implies |f_0(x) - f_0(0)| < \frac{1}{2} \right)$$

がなりたたねばならない。ところが、このような δ にたいして n_0 として、

$$n_0 = \ulcorner \frac{1}{\delta} \urcorner$$

(すなわち、 $\frac{1}{\delta}$ 以上であるような最小の整数) をとって、

$$a = \frac{2}{(4n_0 + 1)\pi}$$

とおくと、

$$|a - 0| = |a| < \delta \text{ にもかかわらず } |f_0(a) - f_0(0)| = 1 \not< \frac{1}{2}$$

であることがわかる。(この解答例では詳細は略するが、実際には確かめたほうが良い。) これは (あ) と矛盾するから、f_0 は $x = 0$ で連続ではないことがわかる。 □

(2) (S1), (S3) により、

$$\sin(2n\pi) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

が容易にわかる。あとは、連続性の定義の ϵ として $c/2$ を採用すれば (1) と同様の議論で f_c が連続になり得ないことがわかる。

□

(**注意**)

問題15.1 **では、三角不等式の使い方が誤っている誤答例をよく見かけた。ただしくなりたつのは**

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

や

$$|a|-|b| \leq |a-b|$$

である。(**なお、後者は前者の変数変換により容易に得られる。**)

問題15.2 **のポイントは、分母の評価である。分母、分子ともに正の数の分数においては、分母が小さくなるほど値が大きくなる。したがって、解答例の**(**え**)**のような評価が必要である。**

問題15.3 **のグラフは教科書の**P.18 **にある。**(**ただし** $x>0$ **の部分だけ**) **この関数の** $x=0$ **での値をどう定めようと決して連続にはなり得ないというのが問題の意味。解答例では** n_0 **として**「n_0」**を採用したが、もちろん他の値でも良い。ガウス記号を用いるのも良いし、日本語で「○○より大きい整数」のように書いても良い。**

(**補記**) **問題**15.1, 15.2 **は関数の連続性を問う問題である。実際にはこれらの式の連続性を言うには、教科書の定理**1.11 **を用いるほうがずっと易しい。たとえば、問題**15.1 **の** f **の連続性を確かめるにはつぎのようにしてやればよい。**

(**連続**1) ϵ-δ **論法によりつぎの二つの関数が連続であることを確かめる**.
- (a) **定数関数** $g_0(x)=1$.
- (b) **関数** $g_1(x)=x$.

(**連続**2) **つぎに、教科書の定理**1.11 (2) **をつかって、順に、**
- (a) $g_1(x)$ **二つの積** $g_2(x)=g_1(x)\times g_1(x)=x^2$
- (b) $g_1(x)$ **と** $g_2(x)$ **の積** $g_3(x)=x^3$

のような単項式で表される関数が連続であることを確かめる。

(**連続**3) **最後に、教科書の定理**1.11 (1) **を**
- (a) $h(x)=x^3+3x^2=g_3(x)+3g_2(x)$
- (b) $k(x)=x^3+3x^2-5x=h(x)-5g_1(x)$
- (c) $f(x)=x^3+3x^2-5x+7=k(x)+7$

のような多項式に順に用いることにより、一般の多項式が連続であることを確かめる。