

定義 12.1 (“教科書 1.1.4”). 関数 $f: X \rightarrow Y$ が

(1) 単射 であるとは、

$$x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

言い換えると、

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

であるときにいう。

(2) 全射 であるとは、

$$\forall y \in Y \exists x \in X; f(x) = y$$

であるときにいう。

(3) 全単射 であるとは、単射でかつ全射でもある時に言う。

X が弓の集合、 Y がトリの集合だとする。関数とは、 X のおのおのからひとつづつ矢を発射、それぞれどれかのトリに当てることを意味している。

f が単射であるとは、各々の矢がそれぞれ別のトリに当たる（一つのトリに二つ以上の矢が当たることはない）と言う意味、 f が全射であるとは、すべての矢がそこにいる全てのトリにあたるという意味である。

同じ式でも定義域 X と終域 Y が何であるかによって、全射か単射かは異なる。次のことは、簡単だが大変重要である。

定理 12.1. (1) 関数 $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば、 f の逆写像が存在する。

(2) 逆に 関数 $f: X \rightarrow Y$ が逆写像を持つならば、 f は全単射である。

(3) 関数 f の逆写像は、存在すれば一意である。

連続関数の場合はどうであろうか。一変数では関数の単調性がキーになる。

定義 12.2 (“1.3.6”). 実数のある区間 I で定義された関数 f が狭義単調増加関数であるとは、

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

をみたすときにいう。

定理 12.2 (“教科書定理 1.16”). f が閉区間 $[a, b]$ 上の狭義単調増加な連続関数であれば、

$$f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$$

の逆関数

$$f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

が存在する。さらに、この f^{-1} は連続で、かつ狭義単調増加である。

問題 12.1. f は閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 ($f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$) で、 $f(0) < f(1)$ であるとする。 f が単射ならば、 f は狭義単調増加でなければならないことを証明しなさい。

話は全然違うが、時間が許せば次のことも証明しておこう。(使うのは二学期の積分論のとき。)

定理 12.3. 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f は一様連続である。すなわち

$\forall \epsilon > 0 \in [a, b] \exists \delta > 0; \forall x \in [a, b] \forall y \in [a, b] (|y-x| < \delta \implies |f(y)-f(x)| < \epsilon)$ となりたつ。