連続関数の性質

定理 11.1 (“教科書定理1.13”). 関数 f が $x=a$ で連続とし、$f(a)>0$ とする。このとき、$\exists\delta>0$ で、

$$(a-\delta, a+\delta) \implies f(a)>0$$

を満たすものが存在する。

定理 11.2 (“教科書定理1.14”, 中間値の定理). 関数 f が閉区間 $[a,b]$ で連続とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 γ にたいして、$f(c)=\gamma$ をみたすような $c\in[a,b]$ が存在する。

定理 11.3 (“教科書定理1.15”, ワイエルシュトラスの定理). 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f は必ず最大値をとる。(とくに f は $[a,b]$ で有界である。

問題 11.1. ワイエルシュトラスの定理で、閉区間を考えているのは大変重要である。そこで、

(1) 閉区間 $(0,1)$ で連続な関数 f で、有界でないものの例を挙げ、実際にそれが有界でないことを示しなさい。

(2) 閉区間 $(0,1)$ で連続な関数 f で、有界だが、最大値をもたないものの例を挙げ、その f について実際に

$$\{f(x); x\in(0,1)\}$$

の上限を求め、最大値は存在しないことを示しなさい。