極限に関する定理

定理 10.1 (“**教科書定理**1.9”). 3 **つの関数** f, g, h **が、実数** a **を含む区間** D **で定義されており、**$x \in D$ $(x \neq a)$ **で、** $f(x) \leq g(x)$ **とする。このとき、**

(1) $x \to a$ **のときの** $f(x), g(x)$ **の極限がともに存在すれば、**

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

(2) $x \in D(x \neq a)$ **の範囲で、**$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ **であって、なおかつ**

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) \quad (\text{この等しい値を } A \text{ とおく})$$

がなりたつとすると、 $h(x)$ **も** $x \to a$ **のときの極限が存在して、**A **に等しい。**

定理 10.2. f, g **が** a **の近くで定義されており、**

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

がそれぞれ存在するとする。このとき、

(1) $\lim_{x \to a}(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 A + c_2 B$. (**但し** $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.)
(2) $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = AB$.
(3) $B \neq 0$ **のとき、ある正の実数** c **が存在して、** $g(x)$ **は** $(a-c, a+c)$ **で** (**定義されてなおかつ**) 0 **以外の値をとり、**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

問題 10.1. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ **とおく。このとき、正の実数** ϵ **にたいして、**

$$|x - 1| < \delta \implies |f(x) - f(1)| < \epsilon$$

をみたすような正の数 δ **の例あげて、実際それを確かめなさい。**

問題 10.2. 関数 $f(x)$ **が** a **の近くで定義されており、**f **は** a **で連続、すなわち極限** $A = \lim_{x \to a} f(x)$ **が存在して** $f(a)$ **と等しいとする。**(**定理**9.1 **を使うほうが簡明である。**) **このとき、点列** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **が** a **に収束すれば、**

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$$

であることを示しなさい。

問題 10.3. 前問の逆はどうか。すなわち、関数 $f(x)$ **が** a **の近くで定義されており、**f **が、性質**

> a **に収束する任意の点列** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **にたいして、**
> $$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$$

をみたせば、f **は** a **で連続であると言えるだろうか、理由を挙げて述べなさい。**(**少しむずかしい**)

n	n^5	$(1.1)^n$	$\frac{n^5}{1.1}$
1	1	1.10	0.909
2	32	1.21	26.446
3	243	1.33	182.569
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	100000	2.59	38554.329
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
51	345025251	12912	2671922.994
52	380204032	14204	2676683.920
53	418195493	15624	2676498.687
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	10000000000	13780.61	725657.159
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
200	320000000000	189905276.53	1685.051
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
299	2389769101499	2379100905625.82	1.004
300	2430000000000	2617010996188.40	0.928
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
310	2862915100000	6787852539362.45	0.422

$$\left.\frac{n^5}{1.1^n}\right|_{n=400} = 0.0002839395524$$

$$\left.\frac{n^5}{1.1^n}\right|_{n=500} = 0.00000006287926297$$