関数の極限値・左極限、右極限 (2)。関数の連続性の定義

定義 9.1. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であるとは、次の二条件が同時に満足されるときに言う。

(1) x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値 A が存在する。
(2) $f(a)=A.$

上の二条件はまとめて

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

と書かれることが多い。ただし、こう書かれてはいても、上の二つのことを確かめる必要があることを覚えておくことが大事である。

定理 9.1. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であることは、次の条件と同値である。

$$\boxed{\forall \epsilon>0, \exists \delta>0; (|x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\epsilon)}$$

上の定義で、$|x-a|$ は x と a の距離、$f(x)-f(a)$ は $f(x)$ と $f(a)$ の距離であることに注意する。上の定理による連続性の「定義」は多変数関数や、距離空間のあいだの写像の連続性の定義にそのまま一般化することができる。

問題 9.1. $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x): x\to x^2$ にたいして、

(1) $a=1$ のとき、

$$|x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<0.1$$

を満たす正の数 δ の例を挙げ、実際にそれがなりたつことを確かめなさい。

(2) 上と同様のことを $a=10$ で行ないなさい。すなわち、$a=10$ のとき、

$$|x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<0.1$$

を満たす正の数 δ の例を挙げ、実際にそれがなりたつことを確かめなさい。

(3) 上と同様のことを $a=100$ で行ないなさい。
(4) 任意の実数 a に対して、$f(x)$ は a で連続であることを示しなさい。