関数の極限値・左極限、右極限。

今回から、関数の話に話題の重点をうつす。

これから、「a の近くで定義されている(実数値) 関数 f 」という言い方をもちいることがある。これは、次の二つの状況を同時に満足していることを言い表す言葉である。

(1) f は $\mathbb{R}$ のある部分集合 S 上定義されている関数 $(f : S \to \mathbb{R})$ である。

(2) S は a を含むある開区間 I を部分集合として含む

定義 8.1 ("1.3.2"). f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値 は A である (「$x \to a$ のとき f は A に収束する」とも言う) とは、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; (0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon)$$

が満たされるときに言う。

($x \to a$ の過程において、「$x = a$ を許さない」というのが一つのポイントである。)

補題 8.1. 上の定義の状況のもとで、関数 $f(x)$ の x が a に近づくときの極限値は存在するとすれば唯一つである。

定義 8.2. $f(x)$ の $x \to a$ の極限を (それがもし存在すれば、)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

とかく。

定義 8.3 ("1.3.3"). f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、x が a に近づくときの $f(x)$ の右極限値 は A である (「$x \downarrow a$ のとき f は A に収束する」とも言う) とは、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; (0 < x - a < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon)$$

が満たされるときに言う。f および a が与えられたとき、右極限値ももし存在すれば一意的である。これを

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) \text{ あるいは } \lim_{x \to a+0} f(x)$$

と書く。左極限値も同様に定義される。

問題 8.1. 関数 f, g が実数 a の近くで定義されていて、

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \lim_{x \to a} g(x) = B$$

がそれぞれ存在し、なおかつ $B \neq 0$ であるとき、f/g も a の近くで定義されて (すなわち、ある $c > 0$ が存在して、

$$(a - c, a + c) \ni x \to \frac{f(x)}{g(x)}$$

が分母が 0 にならずに定義されて)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

であることを証明しなさい。