

コーシー列

定義 7.1. 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < \epsilon$$

がなりたつときに言う。

補題 7.1. 実数の収束列はコーシー列である。

定理 7.1 (“定理 1.8”). コーシー列は収束列である。

問題 7.1. 実数 x に対して、 x の整数部分を $[x]$ と書き、 x の小数部分 $x - [x]$ を $\langle x \rangle$ とここでは書くことにする。 α は無理数であるとする。このとき、

(1) 数列 $\{\langle n\alpha \rangle\}_{n=1}^{\infty}$, すなわち

$$\{\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \langle 3\alpha \rangle, \langle 4\alpha \rangle, \dots\}$$

は収束する部分列を持つことを示しなさい。

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$|\langle n\alpha \rangle - \langle m\alpha \rangle| < \epsilon$$

を満たす整数 n, m の組が無数個存在することを示しなさい。

(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$\left| \alpha - \frac{k}{l} \right| < \frac{\epsilon}{l}$$

を満たすような整数の組 k, l が存在することを示しなさい。(ヒント: (2) は、 $n - m = l$ とおくと)

$$|l\alpha - k| < \epsilon$$

がある整数 k にたいしてなりたつことを意味する。(なぜか?)

| | | | | |
|------------|-------------------------|---------|-------|--|
| A | α | alpha | アルファ | ギリシャ文字の表。 ● 左から順に、大文字、小文字、英語での読み、日本語での読み方を書いた。(ただし、「日本語での読み方」はだいたいの目安に過ぎない。) |
| B | β | beta | ベータ | |
| Γ | γ | gamma | ガンマ | |
| Δ | δ | delta | デルタ | |
| E | ϵ, ε | epsilon | イブシロン | |
| Z | ζ | zeta | ゼータ | |
| H | η | eta | エータ | |
| Θ | θ, ϑ | theta | シータ | |
| I | ι | iota | イオタ | |
| K | κ | kappa | カッパ | |
| Λ | λ | lambda | ラムダ | ● A, B, E など、通常のア ルファベットと同じに見え る文字は、ふつうは数学で は用いられない。 ● 逆に、同じ読みでも二つ 以上の文字がある場合、数 学では二つを区別し、それ ぞれ別の意味で用いること がある。 |
| M | μ | mu | ミュー | |
| N | ν | nu | ニュー | |
| Ξ | ξ | xi | グザイ | |
| O | o | omicron | オミクロン | |
| Π | π, ϖ | pi | パイ | |
| P | ρ, ϱ | rho | ロー | |
| Σ | σ, ς | sigma | シグマ | |
| T | τ | tau | タウ | |
| Υ | υ | upsilon | ウブシロン | |
| Φ | ϕ, φ | phi | ファイ | |
| X | χ | chi | カイ | |
| Ψ | ψ | psi | プサイ | |
| Ω | ω | omega | オメガ | |