区間縮小法と部分列

定理 6.1. (“定理 1.6” [区間縮小法]) 閉区間の列 I_n について、$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \dots$ がなりたつとする。このとき、

$$\bigcap_n I_n \neq \emptyset.$$

さらに、I_n の長さを $\mathrm{length}(I_n)$ と書くとき、

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{length}(I_n)) = 0$$

のなりたつならば、$\bigcap_n I_n$ はただ一点のみからなる。

定義 6.1. 数列 $\{a_n\}$ が与えられているとする。このとき、自然数の増加列 $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ を定めて、

$$\{a_{n_j}; j = 1, 2, 3, \dots\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\}$$

を $\{a_n\}$ の部分列という。(テキストの 1.2.6 は少し書き間違いがあるので注意。)

定理 6.2. (“定理 1.9”)[ボルツァノ・ワイエルシュトラス] 有界な数列は、収束する部分列を持つ。

問題 6.1. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{(n \text{ の } (\text{正の}) \text{ 約数の数})}{n}$$

で定義する。このとき、

(1) a_1, a_2, a_3,..., a_{15} を折れ線グラフに描きなさい。
(2) $\{a_n\}$ は収束するか、理由を挙げて答えなさい。
(3) $\{a_n\}$ の部分列で収束するものがあれば、その具体例を答えなさい。