

単調増加・減少数列 (2), 数 e

- 「みんなが満足するおいしいパンを作る店」を作るには？ 否定するには？
- 収束の定義の「どんな精度でも ok」とはどういうことか？
- 記号を使って自動化。

定理 5.1. (“例 1.8”)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

とおく。このとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある正の値に収束する。

定義 5.1. 収束値

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

のことを e と書き、ネイピアの数とか、自然対数の底と呼ぶ。

命題 5.2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ は収束し、

$$e \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

がなりたつ。

問題 5.1. 正の実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が、次の二つの条件を満たすとする。

- (1) $\forall n$ にたいして $a_n < b_n$.
- (2) $\{a_n\}$ は a , $\{b_n\}$ は b にそれぞれ収束する。

このとき、 $a < b$ と必ず言えるだろうか？ 言えるならば証明を、言えない場合には反例を挙げなさい。(ヒント: $a > b$ となることはないが、 $a = b$ となることは...?)