数列の収束の定義とそれに関する諸定理

収束の定義は前回の定義 2.4 で述べた通りである。それでは定義 2.4 の判定法を満たす c は唯一つだろうか？

定理 3.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (ある人が確かめたところ) c に収束し、(別の人が確かめたところ) c' にも収束するなら、

$$c = c'$$

である。つまり、数列の収束先は存在するとしたら唯一つしかない。

そこで、つぎのように定義することができる。

定義 3.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある数 c に収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c$$

と書いて、c のことを $\{a_n\}$ の極限と呼ぶ。

定義のあとは、これに慣れるためにいくつか練習を行なう。まずは、例である。

例 3.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

厳密には、上の例の証明には次のようなことを使う。

補題 3.1. 任意の実数 r に対して、それよりも大きな整数 n が存在する。

さて、つぎには極限のもつ一般的な性質について知らねばならない。次のような事実が基本的である。

定理 3.2. 極限をとるという操作は和、差、積、商、大小関係を保存する。

具体的な意味はテキストの "定理 1.4" と "定理 1.2" を参照のこと。このような定理に厳密な証明をつけ得ることが定義 2.4 の良いところである。

問題 3.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1}$$

を求め、その答が確かに正しいことを定義 2.4 で述べた定義に基づいて証明せよ。