

前回の小テスト問題の解答と、考え方、解答の書き方を解説し、前半のまとめとしよう。

[前回の問題] 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとする。 $A_1, A_2 \subset X, B_1, B_2 \subset Y$ とするとき、

(あ)
$$f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$$

(い)
$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$$

はいつでも正しいだろうか。正しい場合には証明し、正しくない場合には具体的な反例を挙げよ。

- (1) アイディアを得るためには、例を駆使したり、たとえ話を考えたりする。そのさい、必ずしも論理的である必要はない。
- (2) 良いアイディアが浮かんだら、今度は論理の活躍する番である。一步一步着実に確かめるのが良い。
- (3) アイディアが浮かばない場合などに、問題を「論理記号」などの記号で全部書いてしまうのが有効な場合もある(「和文数訳」)。問題が整理されて見やすくなるからだ。
- (4) 論理がしっかりしたら、つぎに、それを他人にうまく説明するにはどうすれば良いかを考える。

「証明」は「道案内」に似ている。出発点は既存の知識であり、到達点は定理の主張である。その見方からすると、

- (1) アイディアを得るのは、目的地への道筋をあれこれ思案することにあたる。そのさい、必ずしもそれらの道筋を実際に歩いてみる必要はない。
- (2) 道筋が決まったら、今度は実際の案内の番である。一步一步着実に確かめるのが良い。(思考のように「ワープ」するわけにはいかない。)
- (3) ちょっと記憶があやふやになったような場合には、筋の名前を地図で確認することが有効な場合がある。
- (4) 案内を確実にするためには、相手にわかりやすく説明しながらいくのがよい。そうすれば、相手が不安にならずにすむし、同じ箇所を二度案内する必要もなくなる。

問題 7.1. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとする。 $A \subset X$ とするとき、

$$f(\complement A) = \complement f(A)$$

はいつでも正しいだろうか。正しい場合には証明し、正しくない場合には具体的な反例を挙げよ。