

## 日本語技法 NO.6

### 集合算

$x$  についての命題  $P(x)$  と

$$S_P = \{x; P(x)\}$$

を対応づけると、命題の議論を集合の議論に置き換えられることがある。  
それ以外にも、命題と集合とのあいだには密接な関係がある。

$$S_P \cap S_Q = \{x; P(x) \wedge Q(x)\}$$

$$S_P \cup S_Q = \{x; P(x) \vee Q(x)\}$$

$$\complement S_P = \{x; \neg P(x)\}$$

集合の包含関係

$$S \subset T \Leftrightarrow \forall s(s \in S \implies s \in T)$$

集合を扱うときに、例えば、

- 有理数
- 有理数の集合
- 有理数全体の集合

はそれぞれ違うものである。明確に区別する必要がある。

集合と写像を組み合わせた問題は、論理力をみがく格好の材料である。

定義 6.1. 写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられているとき、

(1)  $X$  の部分集合  $A$  に対して

$$\{f(x); x \in A\}$$

を  $A$  の  $f$  による像といい、 $f(A)$  で表す。

(2)  $Y$  の部分集合  $B$  に対して

$$\{x \in X; f(x) \in B\}$$

を  $B$  の  $f$  による逆像といい、 $f^{-1}(B)$  で表す。

レポート解答における注意事項

- すでに証明された結果 (... である。) と、これから証明すべき結果 (... を証明しよう。) 、仮定 (... を仮定する) の区別が明確になるように書くこと。
- 図やグラフを描いた場合、そのどの部分に着目するかを必ず書くこと。

問題 6.1. 定義 6.1 の状況の下で、 $A_1, A_2 \subset X$ ,  $B_1, B_2 \subset Y$  とするとき、

(あ) 
$$f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$$

(い) 
$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$$

はいつでも正しいだろうか。正しい場合には証明し、正しくない場合には具体的な反例を挙げよ。

面白いことに、写像を扱う上では、「像」よりも「逆像」のほうが楽な場合が多い。たとえば、「逆像をとる」という操作は集合の和、共通部分を考える操作など多くの操作と可換である。