日本語技法 NO.4

$\boxed{\forall \text{ と } \exists}$

定義 4.1. 変数 x を含むような命題 P にたいして、

(1) $\forall x(P(x))$ は「どのような x にたいしても、$P(x)$ が成り立つ」という意味である。
(2) $\exists x(P(x))$ は「少なくとも一つの x にたいして、$P(x)$ が成り立つ」という意味である。

原理的には、$\forall, \exists$ および前回の論理記号と、集合論の幾つかの記号を組み合わせることにより、数学のすべての言葉を記号列に翻訳できる。

例えばつぎの文は、「数学的帰納法」を表現したものである。

$$\forall S(0 \in S \text{ and } (\forall n \in \mathbb{N}(n \in S \implies (n+1) \in S)) \implies \mathbb{N} \subset S)$$

また、つぎの文章は、「$(X, \mathcal{U})$ は位相空間である」ということ (の定義) を述べたものである。

(1) $\mathcal{U} \subset 2^X$.
(2) $(\emptyset \in \mathcal{U})$ and $(X \in \mathcal{U})$.
(3) $\forall U(\forall V(U, V \in \mathcal{U} \implies U \cap V \in \mathcal{U}))$.
(4) $\forall \mathcal{S}(\mathcal{S} \subset \mathcal{U} \implies \bigcap_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{U})$.

数学における論理は、これらの記号列に関する「単純な計算」である。つまり、「論理を追う」とは、これらの単純な計算を間違いなく素早く行なうことである。それは、かけ算の九九と同じように、練習をすればほとんど誰でもできる。ただし、つぎのような練習が必要である。

(1) 計算法を覚えること。
(2) 時おり計算の意味を考えること。
(3) 発展問題について解いてみること。

さしあたって今回は、つぎのことに注意しよう。

$\boxed{\text{登場人物 } (x \text{ や } y \text{ などの変数}) \text{ の出てくる順番が大事である。}}$

例えば、$J = \{$ グー、チョキ、パー $\}$, にたいして、$x \succ y$ を、「x は y より強い」というふうに定義すると。

$$\forall x \in J(\exists y \in J(y \succ x))$$

は真の命題だが、

$$\exists y \in J(\forall x \in J(y \succ x))$$

は偽の命題である。

問題 4.1. 変数 x, y についての命題 $P(x, y)$ で、

$$\forall x \exists y (P(x, y))$$

は真の命題だが、

$$\exists y \forall x (P(x, y))$$

は偽の命題であるようなものを挙げ、どうしてそうなのか解説を書きなさい。

. . . .

(補遺)

$$\forall x \in J (P(x))$$

はきちんと書くと

$$\forall x (x \in J \implies P(x))$$

という意味、

$$\exists y \in J (P(y))$$

はきちんと書くと

$$\exists y (y \in J \text{ and } P(y))$$

という意味の省略形である。