代数学 III 試験解答

問題 15.1. $\alpha = \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, $\beta = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{10}$, $\gamma = 5\sqrt{2} - 6\sqrt{10}$ とし、有理数 a, b にたいし、$\delta = a\alpha + \beta + b\gamma$, $L = \mathbb{Q}(\delta)$ とおく。

(1) $a = 1, b = 1$ のとき、$[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ。

(2) $[L : \mathbb{Q}] = 2$ なる (a, b) を 2 組求め、そのときの L をそれぞれ求めよ。

解答:

(1) $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10})$ とおく。$L_1 = L$ であって、なおかつ $[L : \mathbb{Q}] = 8$ であることを示そう。そうすれば

$$[L : \mathbb{Q}] = 8$$

であることがわかる。

Part 0) まずつぎの補題を証明しておく。

補題 15.1. 体 K の元 a, b に対して、

$$K(\sqrt{b}) \ni \sqrt{a}$$

ならば a, b, ab のうちどれか一つは K の元の二乗である。

Proof. 背理法で、a, b, ab のいずれも K の元の二乗でないと仮定する。$K(\sqrt{b}) \ni \sqrt{a}$ だから、ある $c_0, c_1 \in K$ が存在して、

$$\sqrt{a} = c_0 + c_1\sqrt{b}$$

と書ける。両辺を二乗すると

$$a = c_0^2 + c_1^2 b + 2c_0c_1\sqrt{b}.$$

仮定により、$K \not\ni \sqrt{b}$ ゆえ、$[K(\sqrt{b}) : K] = 2$ すなわち 1 と $\sqrt{b}$ は K 上一次独立である。よって、

$$a = c_0^2 + c_1^2 b, \quad 2c_0c_1 = 0$$

とくに 後者の式から $c_0 = 0$ または $c_1 = 0$ がわかる。場合分けをしよう。

(i) $c_0 = 0$ の場合。

$$\sqrt{a} = c_1\sqrt{b}$$

すなわち

$$\sqrt{ab} = c_1 b \in K$$

がなりたつ。これは ab が K の元の二乗でないという仮定に反する。

(ii) $c_1 = 0$ の場合。

$$\sqrt{a} = c_0 \in K$$

がなりたつ。これは a が K の元の二乗でないという仮定に反する。

どの場合も矛盾が生じたから、補題が正しいことが証明されたことになる。 $\square$

Part I) $[L_1 : \mathbb{Q}]$ を求めよう。それには

$$L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}$$

なる部分体の列を考えて、各ステップでの拡大次数を各々求めれば良い。それぞれのステップでは、平方根を一つだけ付け加えているのであるから、拡大次数は 2 か、または 1（全く拡大していない) かのいずれかである。

講義で述べたように、$\sqrt{2}$ は有理数でない。したがって、

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2.$$

つぎに、$\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{2 \cdot 3}(=\sqrt{6})$ のいずれも $\mathbb{Q}$ の元でないことから、補題を用いて、$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \not\ni \sqrt{3}$ がわかる。ゆえに、

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2.$$

さらに、$\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ である。これを示そう。背理法で、$\sqrt{10} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ と仮定すると、補題を $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の場合にもちいて、$\sqrt{10}, \sqrt{3}, \sqrt{10 \cdot 3}(=\sqrt{30})$ のいずれかが $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ に属さねばならなくなる。再び補題を (今度は $K = \mathbb{Q}$ として) もちいると、

$$\sqrt{2}, \sqrt{10}, \sqrt{3}, \sqrt{30}, \sqrt{20}, \sqrt{6}, \sqrt{60}$$

のいずれかが $\mathbb{Q}$ に属さねばならないことになるが、これは講義でのべたように矛盾。

よって、

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})] = 2.$$

結局

$$\begin{aligned}
&[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}) : \mathbb{Q}] \\
=&[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{Q}] \\
=&2[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{Q}] \\
=&2[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}] \\
=&2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.
\end{aligned}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10})$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間として

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}$$

の 8 つで生成されていることが容易にわかるから、上の次元の計算はこれら 8 つが $\mathbb{Q}$ 上一次独立であることを保証していることにも注意しておこう。

Part II) $\mathrm{Gal}(L_1/\mathbb{Q})$ を求めよう。L_1 の $\mathbb{Q}$ 上の生成元 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}$ の共役はそれぞれ L_1 のなかに存在するので、L_1 は $\mathbb{Q}$ の有限次正規代数拡大、すなわちガロア拡大である。$G = \mathrm{Gal}(L_1/\mathbb{Q})$ の元は $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}$ の各々の行き先 (それぞれ二通り) を決めてやると決まり、高々 8 個しかない。

他方で、$|\mathrm{Gal}(L_1/\mathbb{Q})| = [L_1 : \mathbb{Q}] = 8$ であるから、結局上記可能性のすべてがガロア群の元として許されることになる。すなわち、$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{\pm 1\}$ にたいして、$\sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3} \in G = \mathrm{Gal}(L_1/\mathbb{Q})$ を

$$\sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}(\sqrt{2}) = \epsilon_1\sqrt{2}$$
$$\sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}(\sqrt{3}) = \epsilon_2\sqrt{3}$$
$$\sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}(\sqrt{10}) = \epsilon_3\sqrt{10}$$

となるように定めることができて、G の元はかならずこう書ける。

Part III) $L_1 = L$ を示そう。$\sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}$ を $\delta = 6\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{10}.$ に作用させると、

$$\sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}(\delta) = 6\epsilon_1\sqrt{2} + 5\epsilon_2\sqrt{3} - 2\epsilon_3\sqrt{10}.$$

Part I) の最後に注意したように、 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるから、

$$\sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}(\delta) = \delta \quad \Longrightarrow \quad (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (1,1,1) \Longrightarrow \quad \sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3} = \mathrm{id}$$

がわかる。とくに、$\mathrm{Gal}(L_1/L) = \mathrm{id}.$ ガロアの基本定理によりこれは $L = L_1$ を意味している。

(2)

$$\delta = (a+5b)\sqrt{2} + (2a+3)\sqrt{3} + (4-6b)\sqrt{10}$$

であるから、

$$\sigma_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}(\delta) = (a+5b)\epsilon_1\sqrt{2} + (2a+3)\epsilon_2\sqrt{3} + (4-6b)\epsilon_3\sqrt{10}$$

である。$(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ が $\{\pm 1\}^3$ の中をうごくとき、上の式がちょうど二つの値をとるようにすればよい。それには $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{10}$ の係数のうち、ちょうど二つが 0 になるように選べば良いから、つぎの 3 とおりが考えられる。(解答としてはこの中のどれでもいいから二つを書いてあれば良い。)

(あ) $a+5b=0, 2a+3=0,$ すなわち $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{3}{10}$ のとき。
　このときは $\mathbb{Q}(\delta)=\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ である。

(い) $a+5b=0, 4-6b=0,$ すなわち $a=-\frac{10}{3}, b=\frac{2}{3}$ のとき。
　このときは $\mathbb{Q}(\delta)=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ である。

(う) $2a+3=0, 4-6b=0,$ すなわち $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{2}{3}$ のとき。
　このときは $\mathbb{Q}(\delta)=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ である。