代数学III 要約 NO.11

今日のテーマ
$\boxed{\text{群の不変体}}$

定義 11.1. L が K のガロア拡大のとき、$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対して、

$$L^H = \{x \in L; \sigma(x) = x \qquad \forall x \in H\}$$

とおく。これは L と K の中間体である。

つぎのことはすぐにわかる。

補題 11.1. 上の定義の仮定のもとで、L は L^H のガロア拡大である。さらに、H は自然に $\mathrm{Gal}(L/L^H)$ の部分群とみなせる。

今日示したい重要な事実は、H が実は $\mathrm{Gal}(L/L^H)$ と一致することである。(下の定理 11.1.) そのためにつぎの補題を用いる。証明には「H による対称化 (平均化)」のテクニックを用いる。

補題 11.2. L は K のガロア拡大であるとする。任意の $a \in L$ と $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対して、L^H-係数のモニックな多項式 $f(X)$ で、次の性質を満たすものが存在する。

(1) $\deg(f) = |H|$
(2) $f(a) = 0$

系 11.1. 上の補題の仮定のもとで、$[L : L^H] \leq |H|$.

この系から直ちに、求めたかったつぎのことがわかる。

定理 11.1 (部分群から部分体へ). L が K のガロア拡大のとき、$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対して、L は L^H のガロア拡大であって、$\mathrm{Gal}(L/L^H) = H$

問題 11.1. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ とおく。$G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の部分群 H で、位数が 2 あるいは 4 であるものを一つ見つけ、その H に対して L^H を決定せよ。