# 代数学 C NO.8 要約

**今日のテーマ**
**準同型とは、演算を保つ写像の事である。**

**定義 8.1.** $G, H$ を群とする。$G$ から $H$ への写像 $f : G \to H$ が準同型 (正確には、群としての準同型写像) であるとは、任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して、

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

が成り立つときに言う。 準同型 $f$ が全単射でもある時、$f$ を同型と言う。

**例 8.1.** 準同型の例

(1) 任意の群 $G$ に対して、$G$ の上の恒等写像 $\mathrm{id} : G \to G$ は $G$ から $G$ への準同型である。これは全単射であるから、同型である。

(2) $n$ を正の整数とする。$\mathbb{Z}$ から $n\mathbb{Z}$ への写像 $f$ を、

$$f(k) = nk$$

により定めると、$f$ は準同型である。これも同型である。

(3) $n$ を正の整数とする。$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $f$ を、

$$f(k) = nk$$

で定めると、$f$ は準同型である。これは $n > 1$ なら同型ではない。

(4) $n$ を正の整数とする。$\mathbb{Z}$ から $C_n = \langle a; a^n = e \rangle$ を、

$$f(k) = a^k$$

で定めると、$f$ は準同型である。これは同型ではない。

(5) $(\mathbb{Z}, +)$ から $(\mathbb{Q}^\times, \times))$ への写像 $f$ を

$$f(k) = 2^k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

で定義すると、$f$ は準同型である。これは同型ではない。

**例 8.2.** さらなる準同型の例

(1) $n, m$ を正の整数とし、$n$ は $m$ の倍数であるとする。$C_n = \langle a; a^n = e \rangle$ から $C_m = \langle b; b^m = e \rangle$ への写像 $f$ を、

$$f(a^k) = b^k$$

で定義する。このとき、$f$ は準同型写像である。$n \neq m$ ならば、$f$ は同型ではない。

(2) $G = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ から、 $H = \mathbb{R}^\times$ への写像 $f$ を、

$$f(A) = \det(A)$$

で定義すると、$f$ は準同型である。これは行列式を扱う時の基本になる。

**例 8.3.** (準同型でない例)

(1) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $n \mapsto n^2$ は準同型ではない。

(2) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $n \mapsto n + 1$ も準同型ではない。

これまで、群には演算、というデータのほかに、単位元、逆元の存在が基本的であると言ってきた。これらは準同型で自動的に保存される。次の定理でそのことを示そう。

**定理** 8.1. $G, H$ を群とする。$G$ から $H$ への準同型写像 $f : G \to H$ に対して、次の事が成り立つ。

(1) $f$ は単位元を単位元にうつす。すなわち、

$$f(e_G) = e_H. \quad (e_G, e_H \text{ はそれぞれ } G.H \text{ の単位元})$$

(2) $f$ は逆元を逆元にうつす。すなわち、任意の $G$ の元 $g$ に対して、

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$

が成り立つ。

(3) 任意の整数 $n$ と任意の $G$ の元 $g$ に対して、

$$f(g^n) = f(g)^n$$

が成り立つ。

- **準同型の核**

**定義** 8.2. $f : G \to H$ を二つの群の間の準同型とする。$f$ の核 (kernel) とは、$H$ の単位元 $e_H$ の $f$ の逆像の事である。すなわち、

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(e_H) = \{g \in G; f(g) = e_H\}$$

準同型を調べよ、と言われたらとりあえずその核を調べる。核は次のような性質と役割をもつ。

**定理** 8.2. $f : G \to H$ を二つの群の間の準同型とする。このとき、

(1) $f$ の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は $G$ の正規部分群である。

(2) $g_1, g_2 \in G$ に対して、「$f(g_1) = f(g_2)$」と「$g_1 \equiv g_2 \pmod{\mathrm{Ker}(f)}$」とは同値である。

上の定理はとても大事であるので、次回からも引き続き考えることになる。(実力のある諸君はこの時点で準同型定理 (NO.1 要約参照) の証明を完結できる筈である。試していただきたい。)

※レポート問題

つぎのうち一問を選択して解きなさい。(期限：次の講義の終了時まで。)

(I) 例 8.2(1) において、「$n$ は $m$ の倍数である」という条件を取り去ると $f$ は群の準同型と言えるか、$n = 2, m = 3$ のときを例にとって論じなさい。

(II) 二面体群 $\mathbb{D}_n = \langle a, b;\ a^n = e,\ b^2 = e,\ ab = ba^{-1}\rangle$ から $C_n = \langle a; a^n = e\rangle$ への写像 $f$ を、

$$f(a^k b^l) = a^k \quad (k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z})$$

で定めると、これは (i) 写像としてうまく定義されているけれども (ii) 群の準同型写像ではないという事を示しなさい。

(III) 二面体群 $\mathbb{D}_n = \langle a, b;\ a^n = e,\ b^2 = e,\ ab = ba^{-1}\rangle$ から $(\{\pm 1\}, \times)$ への写像 $f$ を、

$$f(a^k b^l) = (-1)^l \quad (k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z})$$

で定めると、これは群の準同型写像である事を示しなさい。