

今日のテーマ 《有限群 (続き) ・生成される部分群》

- 群  $G$  と、その部分集合  $M$  とが与えられているとする。このとき、
- $M$  で生成される  $G$  の部分群とは、 $M$  を含む最小の部分群のことである。
  - 特に、 $G$  自身が  $M$  で生成される  $G$  の部分群であるとき、単に、 $G$  は  $M$  で生成される。という。

《生成される部分群》の正確な定義は次のようになる。

定義 4.1 (《生成される部分群》の定義). 群  $G$  とその部分集合  $M$  とが与えられているとする。  $G$  の部分群  $H$  が  $M$  で生成される  $G$  の部分群であるとは、次の条件を満たすときに言う。

- (0)  $H$  は  $M$  を部分集合として含む  $G$  の部分群である。
- (1)  $H$  は上の条件 (0) を満たすもののうち最小のものである。すなわち、次のことが成り立つ。  
 $K$  が、 $M$  を部分集合として含む  $G$  の部分集合であれば、 $H$  は  $K$  の部分群になる。

問題 4.1. 二面体群  $\mathbb{D}_n$  の元  $a^3$  で生成される  $\mathbb{D}_n$  の部分群の元の個数を  $n = 3, 4, 5, 6$  の場合についてそれぞれ計算しなさい。